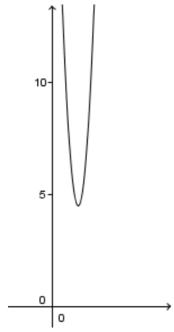
1. $\frac{13+9x^2}{9}-\frac{2x-1}{2}-\frac{1}{3}(4x+1)>0$



$$26+18x^2-18x+9-24x-6>0 \qquad 18x^2-42x+29=0$$

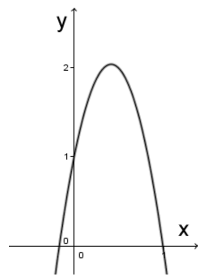
$$\Delta=21^2-29\cdot 18<0$$

$$\forall x\in\mathbb{R}$$

2. $(x+5)^2-8(-x-5)+(-4)^2\leq 0$

$$x^2+10x+25+8x+40+16\leq 0 \qquad x^2+18x+81\leq 0 \qquad (x+9)^2\leq 0 \qquad x=-9$$

3. $\frac{1}{6}(1-x)-\frac{2\left(-\frac{1}{3}\right)+3x^2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}+3x\right)>0$

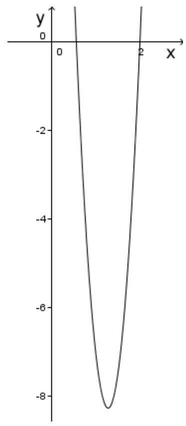


$$\frac{1}{6}-\frac{1}{6}x-\frac{-2+9x^2}{9}-\frac{2}{9}+x>0 \qquad \frac{1}{6}-\frac{1}{6}x+\frac{2}{9}-x^2-\frac{2}{9}+x>0 \qquad -6x^2+5x+1>0$$

$$6x^2-5x-1=0 \qquad x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{12}\Bigg\langle\begin{matrix}1\\-\frac{1}{6}\end{matrix}$$

$$-\frac{1}{6}<x<1$$

4. $16\,x^4-41x^2+18\leq 0$

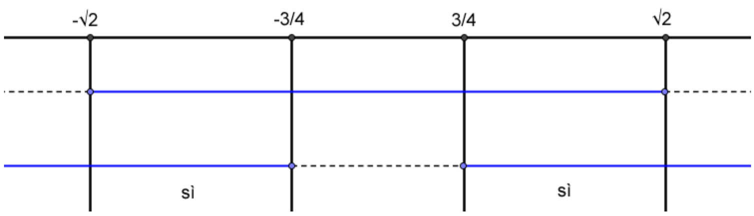


Pongo: $x^2=y$ $\qquad 16y^2-41y+18\leq 0$

$$y_{1,2}=\frac{41\pm\sqrt{1681-1152}}{32}\Bigg\langle\begin{matrix}2\\\frac{9}{16}\end{matrix}$$

$$\frac{9}{16}\leq y\leq 2 \qquad \frac{9}{16}\leq x^2\leq 2$$

$$\begin{cases}x^2\leq 2\\ x^2\geq\frac{9}{16}\end{cases} \qquad \begin{matrix}x=\pm\sqrt{2}\\ x=\pm\frac{3}{4}\end{matrix} \qquad \begin{cases}-\sqrt{2}\leq x\leq\sqrt{2}\\ x\leq-\frac{3}{4}\quad\vee\quad x\geq\frac{3}{4}\end{cases}$$



$$-\sqrt{2}\leq x\leq-\frac{3}{4}\qquad\vee\qquad\frac{3}{4}\leq x\leq\sqrt{2}$$

5. $\begin{cases} x^2 - x\sqrt{2} - x\sqrt{3} + \sqrt{6} < 0 \\ 3x^2 - 7x\sqrt{2} + 4 < 0 \\ 4x^2 + 4\sqrt{3}x + 3 > 0 \end{cases}$

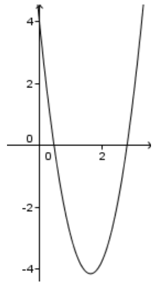
A: $x\,(x-\sqrt{2}) - \sqrt{3}\,(x-\sqrt{2}) < 0$ $(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{3}) < 0$

	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$
−	+	+
−	−	+
+	−	+

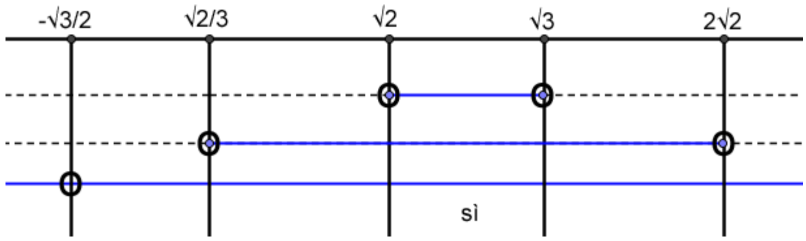
$\sqrt{2} < x < \sqrt{3}$

B: $3x^2 - 7x\sqrt{2} + 4 < 0$ $x_{1,2} = \frac{7\sqrt{2} \pm \sqrt{98-48}}{6}$ ⟨ $2\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{3}$

$\frac{\sqrt{2}}{3} < x < 2\sqrt{2}$



C: $4x^2 + 4\sqrt{3}x + 3 > 0$ $(2x+\sqrt{3})^2 > 0$ $x \neq -\frac{\sqrt{3}}{2}$



$\sqrt{2} < x < \sqrt{3}$

6. $1 \leq \frac{14}{3\,(x+2)} + \frac{4}{3x-3}$

$1 \leq \frac{14}{3\,(x+2)} + \frac{4}{3x-3}$ $\frac{3\,(x+2)(x-1) - 14\,(x-1) - 4\,(x+2)}{3\,(x+2)(x-1)} \leq 0$

$\frac{3x^2 + 3x - 6 - 14x + 14 - 4x - 8}{3\,(x+2)(x-1)} \leq 0$ $\frac{x^2 - 5x}{(x+2)(x-1)} \leq 0$

$N_1 \geq 0$: $x \geq 0$ $N_2 \geq 0$: $x \geq 5$ $D_1 > 0$: $x > -2$ $D_2 > 0$: $x > 1$

	-2	0	1	5
−	−	+	+	+
−	−	−	−	+
−	+	+	+	+
−	−	−	+	+
+	−	+	−	+

$-2 < x \leq 0 \quad \vee \quad 1 < x \leq 5$

7. $\dfrac{\frac{x-5}{2-x}(x-4)}{x-1} > 0$

$N_1 > 0: \quad x > 5 \qquad N_2 > 0: \quad x > 4 \qquad D_1 > 0: \quad x < 2 \qquad D_2 > 0: \quad x > 1$

	1	2	4	5
−	−	−	−	+
−	−	−	+	+
+	+	−	−	−
−	+	+	+	+
−	+	−	+	−

$\mathbf{1 < x < 2 \quad \vee \quad 4 < x < 5}$

8. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} - \dfrac{x}{y} = \dfrac{6}{y} + 1 \\ 3 = x - y \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 - x - 6 - y = 0 \\ 3 = x - y \end{cases} \qquad C.A.: y \neq 0$

$\begin{cases} y = x - 3 \\ x^2 - x - 6 - x + 3 = 0 \end{cases} \qquad x^2 - 2x - 3 = 0 \qquad (x-3)(x+1) = 0$

$\begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases} \quad non\ accettabile\ per\ le\ C.A. \qquad \begin{cases} \mathbf{x = -1} \\ \mathbf{y = -4} \end{cases}$

9. $\begin{cases} 4x^2 + 4y^2 = 101 \\ 2x + 2y = 11 \end{cases}$

$\begin{cases} x + y = \dfrac{11}{2} \\ 4\,(x+y)^2 - 8xy = 101 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = \dfrac{11}{2} \\ xy = \dfrac{5}{2} \end{cases} \qquad z^2 - \dfrac{11}{2}z + \dfrac{5}{2} = 0$

$2z^2 - 11z + 5 = 0 \qquad z_{1,2} = \dfrac{11 \pm \sqrt{121 - 40}}{4} \Big\langle \begin{matrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{\frac{1}{2}} \end{matrix}$

$\begin{cases} \mathbf{x = 5} \\ \mathbf{y = \frac{1}{2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{x = \frac{1}{2}} \\ \mathbf{y = 5} \end{cases}$

10. In un triangolo rettangolo l'area è 96 cm^2 e la somma dei cateti è 28 cm. Determina l'altezza relativa all'ipotenusa.

Indicando con x e y le misure dei due cateti, ricavo il seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{xy}{2} = 96 \\ x + y = 28 \end{cases} \qquad \begin{cases} xy = 192 \\ x + y = 28 \end{cases}$$

$$z^2 - 28z + 192 = 0 \qquad z_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 192}}{1} \left\langle \begin{matrix} \mathbf{16} \\ \mathbf{12} \end{matrix} \right.$$

I due cateti misurano, rispettivamente, 12 cm e 16 cm.
Determino innanzi tutto la misura dell'ipotenusa con il teorema di Pitagora:

$$BC = \sqrt{AC^2 + AB^2} = 20\ cm$$

Conoscendo l'area, posso calcolare la misura dell'altezza relativa all'ipotenusa, dividendo la doppia area per l'ipotenusa:

$$h = \frac{2A}{BC} = \frac{2 \cdot 96\ cm^2}{20\ cm} = \mathbf{9,6\ cm}$$

11. La somma dei lati di due quadrati è uguale a 50 cm. Il rettangolo formato dalle diagonali dei due quadrati ha l'area di 1200 cm^2. Calcola l'area dei due quadrati.

Indicando con x e y le misure dei lati dei due quadrati, le diagonali misureranno rispettivamente $x\sqrt{2}$ e $y\sqrt{2}$, perciò:

$$\begin{cases} x\sqrt{2}\, y\sqrt{2} = 1200 \\ x + y = 50 \end{cases} \qquad \begin{cases} xy = 600 \\ x + y = 50 \end{cases}$$

$$z^2 - 50z + 600 = 0 \qquad z_{1,2} = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 600}}{1} \left\langle \begin{matrix} \mathbf{30} \\ \mathbf{20} \end{matrix} \right.$$

I due lati misurano, rispettivamente, 20 cm e 30 cm. Perciò le aree dei due quadrati misurano **400 cm^2** e **900 cm^2**.

12. Un triangolo isoscele è equivalente a tre quadrati di lato 40 cm. La somma della base e dell'altezza del triangolo è uguale al perimetro di un pentagono regolare di lato 44 cm. La base sia maggiore dell'altezza. Calcola il perimetro del triangolo.

Indico con x la base del triangolo e con y l'altezza del triangolo (ricordando che x>y). Il perimetro del pentagono è **220 cm** perciò:

$$x + y = 220$$

Tre quadrati di lato 40 cm hanno area complessiva: $(40\ cm)^2 \cdot 3 = 4800\ cm^2$, che corrisponde all'area del triangolo. Deduco quindi il sistema:

$$\begin{cases} \frac{xy}{2} = 4800 \\ x + y = 220 \end{cases} \qquad \begin{cases} xy = 9600 \\ x + y = 220 \end{cases}$$

$$z^2 - 220z + 9600 = 0 \qquad z_{1,2} = \frac{110 \pm \sqrt{12100 - 9600}}{1} \left\langle \begin{matrix} \mathbf{160} \\ \mathbf{60} \end{matrix} \right.$$

La base misura 160 cm e l'altezza 60 cm. Posso quindi ricavare il lato obliquo con il teorema di Pitagora:

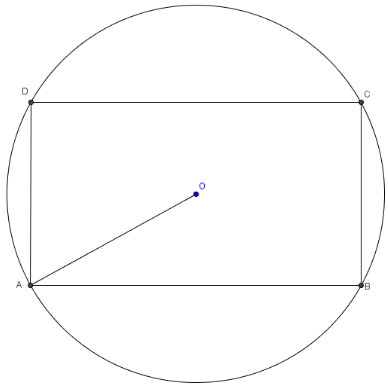
$$l = \sqrt{(80\ cm)^2 + (60\ cm)^2} = 100\ cm$$

Perciò il perimetro vale: $100\ cm\ \cdot 2 + 160\ cm = \mathbf{360\ cm}$

13. Un rettangolo ha il perimetro lungo $14\,r$ e il raggio della circonferenza circoscritta misura $\frac{5}{2}r$. Qual è l'area del rettangolo?

Indico con x il lato AB del rettangolo e con y il lato BC:

$$2x + 2y = 14$$



Considero la diagonale AC del rettangolo, che corrisponde al diametro della circonferenza, perciò:

$$AC = 5r$$

Vale il teorema di Pitagora, perciò:

$$x^2 + y^2 = 25$$

Ottengo quindi il sistema:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 7 \\ (x + y)^2 - 2xy = 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ -2xy = -24 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 12 \end{cases}$$

$$z^2 - 7z + 12 = 0 \qquad z_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} \left\langle \begin{matrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{3} \end{matrix} \right.$$

I lati del rettangolo misurano rispettivamente 4r e 3r. Perciò l'area del rettangolo è **12 r^2**.