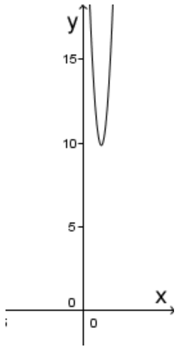
1. $\frac{14+9x^2}{9} - \frac{3x-1}{2} - \frac{1}{3}(2x+1) > 0$



$$28 + 18x^2 - 27x + 9 - 12x - 6 > 0 \qquad 18x^2 - 39x + 31 = 0$$

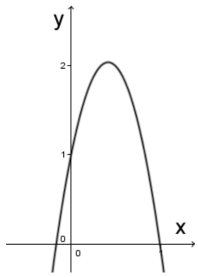
$$\Delta = 39^2 - 4 \cdot 31 \cdot 18 < 0$$

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$$

2. $(x+3)^2 - 6(-x-3) + (-3)^2 \le 0$

$$x^2 + 6x + 9 + 6x + 18 + 9 \le 0 \qquad x^2 + 12x + 36 \le 0 \qquad (x+6)^2 \le 0 \qquad \boldsymbol{x = -6}$$

3. $\frac{1}{6}(1-x) - \frac{4\left(-\frac{1}{3}\right)+3x^2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{4}{3} + 3x\right) < 0$

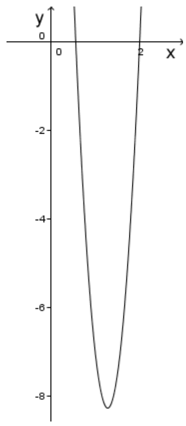


$$\frac{1}{6} - \frac{1}{6}x - \frac{-4+9x^2}{9} - \frac{4}{9} + x < 0 \qquad \frac{1}{6} - \frac{1}{6}x + \frac{4}{9} - x^2 - \frac{4}{9} + x < 0 \qquad -6x^2 + 5x + 1 < 0$$

$$6x^2 - 5x - 1 = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{12} \left\langle \begin{array}{l} \boldsymbol{1} \\ -\boldsymbol{\frac{1}{6}} \end{array} \right.$$

$$\boldsymbol{x < -\frac{1}{6}} \quad \vee \quad \boldsymbol{x > 1}$$

4. $16x^4 - 41x^2 + 18 \le 0$

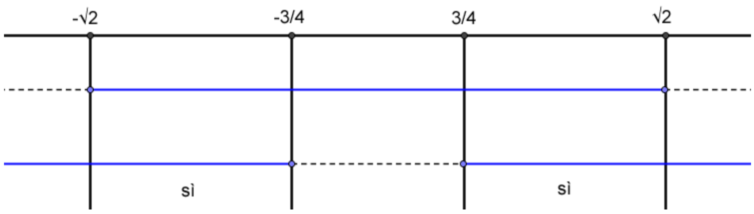


Pongo: $x^2 = y$ $\qquad 16y^2 - 41y + 18 \le 0$

$$y_{1,2} = \frac{41 \pm \sqrt{1681 - 1152}}{32} \left\langle \begin{array}{l} \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{\frac{9}{16}} \end{array} \right.$$

$$\frac{9}{16} \le y \le 2 \qquad \frac{9}{16} \le x^2 \le 2$$

$$\begin{cases} x^2 \le 2 \\ x^2 \ge \frac{9}{16} \end{cases} \qquad \begin{array}{c} x = \pm\sqrt{2} \\ x = \pm\frac{3}{4} \end{array} \qquad \begin{cases} -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2} \\ x \le -\frac{3}{4} \quad \vee \quad x \ge \frac{3}{4} \end{cases}$$



$$\boldsymbol{-\sqrt{2} \le x \le -\frac{3}{4}} \quad \vee \quad \boldsymbol{\frac{3}{4} \le x \le \sqrt{2}}$$

5. $\begin{cases} -x^2 + x\sqrt{2} + x\sqrt{3} - \sqrt{6} > 0 \\ 3x^2 - 7x\sqrt{2} + 4 < 0 \\ 4x^2 + 4\sqrt{3}x + 3 > 0 \end{cases}$

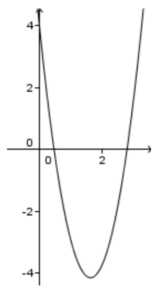
A: $x\left(-x+\sqrt{2}\right) - \sqrt{3}\left(-x+\sqrt{2}\right) > 0$ $\qquad (x-\sqrt{2})(x-\sqrt{3}) < 0$

	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$
−	+	+
−	−	+
+	−	+

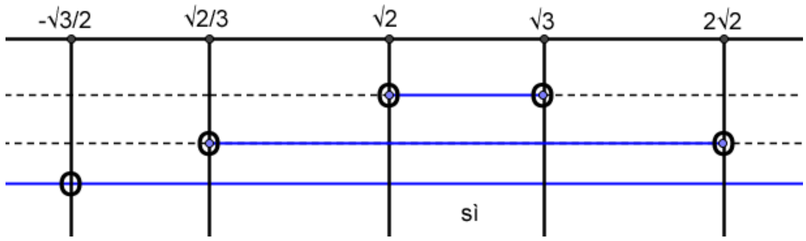
$$\sqrt{2} < x < \sqrt{3}$$

B: $3x^2 - 7x\sqrt{2} + 4 < 0$ $\qquad x_{1,2} = \frac{7\sqrt{2}\pm\sqrt{98-48}}{6} \left\langle \begin{array}{l} 2\sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} \end{array} \right.$

$$\frac{\sqrt{2}}{3} < x < 2\sqrt{2}$$



C: $4x^2 + 4\sqrt{3}x + 3 > 0$ $\qquad \left(2x+\sqrt{3}\right)^2 > 0$ $\qquad x \neq -\frac{\sqrt{3}}{2}$



$$\sqrt{2} < x < \sqrt{3}$$

6. $1 \leq \frac{14}{3\,(x+2)} + \frac{4}{3x-3}$

$$1 \leq \frac{14}{3\,(x+2)} + \frac{4}{3x-3} \qquad \frac{3\,(x+2)(x-1) - 14\,(x-1) - 4\,(x+2)}{3\,(x+2)(x-1)} \leq 0$$

$$\frac{3x^2 + 3x - 6 - 14x + 14 - 4x - 8}{3\,(x+2)(x-1)} \leq 0 \qquad \frac{x^2 - 5x}{(x+2)(x-1)} \leq 0$$

$N_1 \geq 0$: $\quad x \geq 0$ $\qquad N_2 \geq 0$: $\quad x \geq 5$ $\qquad D_1 > 0$: $\quad x > -2$ $\qquad D_2 > 0$: $\quad x > 1$

	-2	0	1	5
−	−	+	+	+
−	−	−	−	+
−	+	+	+	+
−	−	−	+	+
+	−	+	−	+

$$-2 < x \leq 0 \quad \vee \quad 1 < x \leq 5$$

7. $\dfrac{\frac{x-5}{3-x}(x-6)}{x-2} > 0$

$N_1 > 0: \quad x > 5$ $\qquad N_2 > 0: \quad x > 6$ $\qquad D_1 > 0: \quad x < 3$ $\qquad D_2 > 0: \quad x > 3$

2	3	5	6	
−	−	−	−	+
−	−	−	+	+
+	+	−	−	−
−	+	+	+	+
−	+	−	+	−

$$\mathbf{2 < x < 3 \quad \vee \quad 5 < x < 6}$$

8. $\begin{cases} \frac{y^2}{x} - \frac{y}{x} = \frac{6}{x} + 1 \\ 3 = y - x \end{cases}$

$$\begin{cases} y^2 - y - 6 - x = 0 \\ 3 = y - x \end{cases} \qquad C.A.: x \neq 0$$

$$\begin{cases} x = y - 3 \\ y^2 - y - 6 - y + 3 = 0 \end{cases} \qquad y^2 - 2y - 3 = 0 \qquad (y-3)(y+1) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases} \qquad non\ accettabile\ per\ le\ C.A. \qquad \begin{cases} \mathbf{x = -4} \\ \mathbf{y = -1} \end{cases}$$

9. $\begin{cases} 4x^2 + 4y^2 = 29 \\ 2x + 2y = 7 \end{cases}$

$$\begin{cases} x + y = \frac{7}{2} \\ 4\,(x+y)^2 - 8xy = 29 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = \frac{7}{2} \\ xy = \frac{5}{2} \end{cases} \qquad z^2 - \frac{7}{2}z + \frac{5}{2} = 0$$

$$2z^2 - 7z + 5 = 0 \qquad z_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{4} \Big\langle \begin{matrix} \mathbf{\frac{5}{2}} \\ \mathbf{1} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \mathbf{x = \frac{5}{2}} \\ \mathbf{y = 1} \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{x = 1} \\ \mathbf{y = \frac{5}{2}} \end{cases}$$

10. In un triangolo rettangolo l'area è 216 cm² e la somma dei cateti è 42 cm. Determina l'altezza relativa all'ipotenusa.

Indicando con x e y le misure dei due cateti, ricavo il seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{xy}{2} = 216 \\ x + y = 42 \end{cases} \qquad \begin{cases} xy = 432 \\ x + y = 42 \end{cases}$$

$$z^2 - 42z + 432 = 0 \qquad z_{1,2} = \frac{21 \pm \sqrt{441 - 432}}{1} \Big\langle \begin{matrix} \mathbf{24} \\ \mathbf{18} \end{matrix}$$

I due cateti misurano, rispettivamente, 24 cm e 18 cm.
Determino innanzi tutto la misura dell'ipotenusa con il teorema di Pitagora:

$$BC = \sqrt{AC^2 + AB^2} = 30\ cm$$

Conoscendo l'area, posso calcolare la misura dell'altezza relativa all'ipotenusa, dividendo la doppia area per l'ipotenusa:

$$h = \frac{2A}{BC} = \frac{2 \cdot 216\ cm^2}{30\ cm} = \mathbf{14,4\ cm}$$

11. La somma dei lati di due quadrati è uguale a 70 cm. Il rettangolo formato dalle diagonali dei due quadrati ha l'area di 2400 cm². Calcola l'area dei due quadrati.

Indicando con x e y le misure dei lati dei due quadrati, le diagonali misureranno rispettivamente $x\sqrt{2}$ e $y\sqrt{2}$, perciò:

$$\begin{cases} x\sqrt{2}\, y\sqrt{2} = 2400 \\ x + y = 70 \end{cases} \qquad \begin{cases} xy = 1200 \\ x + y = 70 \end{cases}$$

$$z^2 - 70z + 1200 = 0 \qquad z_{1,2} = \frac{35 \pm \sqrt{1225 - 1200}}{1} \Big\langle \begin{matrix} \mathbf{40} \\ \mathbf{30} \end{matrix}$$

I due lati misurano, rispettivamente, 30 cm e 40 cm. Perciò le aree dei due quadrati misurano **900 cm²** e **1600 cm²**.

12. Un triangolo isoscele è equivalente a tre quadrati di lato 40 cm. La somma della base e dell'altezza del triangolo è uguale al perimetro di un ottagono regolare di lato 25 cm. La base sia maggiore dell'altezza. Calcola il perimetro del triangolo.

Indico con x la base del triangolo e con y l'altezza del triangolo (ricordando che x>y). Il perimetro dell'ottagono è **200 cm** perciò:

$$x + y = 200$$

Tre quadrati di lato 40 cm hanno area complessiva: $(40\ cm)^2 \cdot 3 = 4800\ cm^2$, che corrisponde all'area del triangolo. Deduco quindi il sistema:

$$\begin{cases} \frac{xy}{2} = 4800 \\ x + y = 200 \end{cases} \qquad \begin{cases} xy = 9600 \\ x + y = 200 \end{cases}$$

$$z^2 - 200z + 9600 = 0 \qquad z_{1,2} = \frac{100 \pm \sqrt{10000 - 9600}}{1} \Big\langle \begin{matrix} \mathbf{120} \\ \mathbf{80} \end{matrix}$$

La base misura 120 cm e l'altezza 80 cm. Posso quindi ricavare il lato obliquo con il teorema di Pitagora:

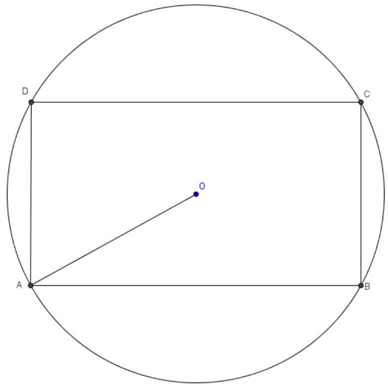
$$l = \sqrt{(60\ cm)^2 + (80\ cm)^2} = 100\ cm$$

Perciò il perimetro vale: $100\ cm \cdot 2 + 120\ cm = \mathbf{320\ cm}$

13. Un rettangolo ha il perimetro lungo $14\,r$ e il raggio della circonferenza circoscritta misura $\frac{5}{2}r$. Qual è l'area del rettangolo?

Indico con x il lato AB del rettangolo e con y il lato BC:

$$2x + 2y = 14$$



Considero la diagonale AC del rettangolo, che corrisponde al diametro della circonferenza, perciò:

$$AC = 5r$$

Vale il teorema di Pitagora, perciò:

$$x^2 + y^2 = 25$$

Ottengo quindi il sistema:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 7 \\ (x+y)^2 - 2xy = 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ -2xy = -24 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 12 \end{cases}$$

$$z^2 - 7z + 12 = 0 \qquad z_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} \langle \begin{matrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{3} \end{matrix}$$

I lati del rettangolo misurano rispettivamente 4r e 3r. Perciò l'area del rettangolo è **12 r^2**.