1. $\left(\sqrt{5}-2\right)^2\left(\sqrt{5}+2\right)^2-\left[\left(3-2\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)\right]^2+\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$

$= (5-4)^2-(9-8)^2+\sqrt[3]{\sqrt{2^2\cdot 2}} = 1-1+\sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$

2. $\left(\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}+2\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^4b^2+a^2b^4}\right)\cdot\frac{ab}{(ab+1)^2}$ $\qquad a>0, b>0$

$=\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}}+2\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2b^2\left(a^2+b^2\right)}\right)\cdot\frac{ab}{(ab+1)^2}=$

$=\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}+2\sqrt{a^2+b^2}+ab\sqrt{a^2+b^2}\right)\cdot\frac{ab}{(ab+1)^2}=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{1}{ab}+2+ab\right)\cdot\frac{ab}{(ab+1)^2}=$

$=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\frac{1+2ab+a^2b^2}{ab}\cdot\frac{ab}{(ab+1)^2}=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\frac{(ab+1)^2}{ab}\cdot\frac{ab}{(ab+1)^2}=\boldsymbol{\sqrt{a^2+b^2}}$

3. $\frac{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{\sqrt{6}}-\frac{x-6}{\sqrt{3}}=\frac{x+\sqrt{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{2}}$

$x^2-3-\sqrt{2}(x-6)=\sqrt{3}\left[x+\sqrt{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)\right]$ $\qquad x^2-3-x\sqrt{2}+6\sqrt{2}=x\sqrt{3}+6\sqrt{2}-3$

$x^2-x\sqrt{2}-x\sqrt{3}=0$ $\qquad x\left(x-\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)=0$ $\qquad \left\langle \begin{array}{l} x_1=\mathbf{0} \\ x_2=\boldsymbol{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \end{array}\right.$

4. $2x\,(x-3)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}x^2-1\right)+\frac{2x-x^2}{6}=-\frac{1}{3}\left(17x+\frac{21}{2}\right)$

$2x^2-6x+\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}x-\frac{1}{6}x^2=-\frac{17}{3}x-\frac{7}{2}$ $\qquad 2x^2=-3$ $\qquad \boldsymbol{\nexists x\in\mathbb{R}}$

5. $\frac{2}{x^2-4}+\frac{x+7}{x-2}-\frac{12x+1}{4x+8}=\frac{58x-14x^2+67}{4x^2-16}$

$\frac{2}{(x-2)(x+2)}+\frac{x+7}{x-2}-\frac{12x+1}{4(x+2)}=\frac{58x-14x^2+67}{4(x-2)(x+2)}$

$\frac{8+4(x+7)(x+2)-(12x+1)(x-2)-(58x-14x^2+67)}{4(x-2)(x+2)}=0$ $\qquad C.A.: x\neq\pm 2$

$8+4x^2+36x+56-12x^2+23x+2-58x+14x^2-67=0$ $\qquad 6x^2+x-1=0$ $\qquad x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{12}=\left\langle \begin{array}{l} \boldsymbol{\frac{1}{3}} \\ \boldsymbol{-\frac{1}{2}} \end{array}\right.$

6. $8\,(x+1)^4-7\,(x+1)^2-1=0$

Pongo: $y=(x+1)^2$ e risolvo l'equazione $8y^2-7y-1=0$ $\qquad y_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49+32}}{16}=\left\langle \begin{array}{l} 1 \\ -\frac{1}{8} \end{array}\right.$

$(x+1)^2=1$ $\qquad \left\langle \begin{array}{ll} x+1=1 & x_1=\mathbf{0} \\ x+1=-1 & x_2=\mathbf{-2} \end{array}\right.$ $\qquad (x+1)^2=-\frac{1}{8}$ $\quad \boldsymbol{\nexists x\in\mathbb{R}}$

Quindi le soluzioni dell'equazione sono: $x_1=\mathbf{0}$ $\qquad x_2=\mathbf{-2}$

7. $x^4+b^2x^2-x^2-b^2=0$ $\qquad b\neq 0$

$x^2\left(x^2+b^2\right)-\left(x^2+b^2\right)=0$ $\qquad \left(x^2+b^2\right)\left(x^2-1\right)=0$

Il primo fattore, in quanto somma di quadrati, non può mai essere nullo, perciò: $x^2-1=0$ $\qquad x_{1,2}=\boldsymbol{\pm 1}$

8. Nell'equazione $x^2-4kx+4k^2-1=0$, determina il valore del parametro affinché siano soddisfatte le seguenti condizioni:

A. la somma delle radici è nulla;

Prima determino per quale valore del parametro l'equazione ha soluzioni, ponendo il discriminante positivo:

$$\frac{\Delta}{4}=(2k)^2-(4k^2-1)=4k^2-4k^2+1=1\geq 0 \qquad \forall k\in\mathbb{R}$$

Perché la somma delle radici sia nulla, il coefficiente del termine di primo grado deve essere nulla, dato che la somma delle radici di un'equazione di secondo grado di equazione generica $ax^2+bx+c=0$ è data da $-\frac{b}{a}$:

$$-4k=0 \qquad k=\mathbf{0}$$

B. una radice è 3;

Basta sostituire 3 al posto dell'incognita, per determinare il valore del parametro richiesto:

$$9-12k+4k^2-1=0 \qquad 4k^2-12k+8=0 \qquad k^2-3k+2=0 \qquad k_{1,2}=\frac{3\pm1}{2}=\left\langle\begin{matrix}\mathbf{2}\\ \mathbf{1}\end{matrix}\right.$$

C. le radici sono reciproche;

Se le radici sono reciproche: $x_1=\frac{1}{x_2}$ cioè, $x_1x_2=1$ e in un'equazione di secondo grado il prodotto delle soluzioni è dato da: $\frac{c}{a}=1$:

$$4k^2-1=1 \qquad 4k^2=2 \qquad k^2=\frac{2}{4} \qquad k_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}$$

D. la somma dei reciproci delle radici è 1/3.

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{3} \qquad \frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{1}{3} \qquad \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=\frac{1}{3} \qquad -\frac{b}{c}=\frac{1}{3} \qquad c=-3b$$

$$4k^2-1=+12k \qquad 4k^2-12k-1=0 \qquad k_{1,2}=\frac{6\pm2\sqrt{10}}{4}=\frac{\mathbf{3\pm\sqrt{10}}}{\mathbf{2}}$$

9. $\begin{cases}x^2-3xy=3x\\ \frac{y}{4}-\frac{x}{2}=1\end{cases}$

$$\begin{cases}y=2x+4\\ x^2-3x\,(2x+4)-3x=0\end{cases} \qquad x^2-6x^2-12x-3x=0 \qquad 5x^2+15x=0 \qquad 5x(x+3)=0$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{x=0}\\ \boldsymbol{y=4}\end{cases} \qquad \begin{cases}\boldsymbol{x=-3}\\ \boldsymbol{y=-2}\end{cases}$$

10. $\begin{cases}x+y=\frac{1}{2}\\ x-y=\frac{3}{2}\\ x^2+z^2=10\end{cases}$

Lavoro sulle prime due equazioni, applicando il metodo di eliminazione:

$$\begin{array}{r}x+y=\frac{1}{2}\\ x-y=\frac{3}{2}\\ \hline 2x=2\end{array} \qquad \begin{cases}x=1\\ y=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

Sostituisco il valore di x nella terza equazione: $1+z^2=10 \qquad z^2=9 \qquad z=\pm3$

$$\begin{cases}\boldsymbol{x=1}\\ \boldsymbol{y=-\frac{1}{2}}\\ \boldsymbol{z=3}\end{cases} \qquad \begin{cases}\boldsymbol{x=1}\\ \boldsymbol{y=-\frac{1}{2}}\\ \boldsymbol{z=-3}\end{cases}$$

11. La somma dei lati di due quadrati vale 8; l'area del rettangolo avente per dimensioni le loro diagonali misura 30. Calcola il perimetro dei due quadrati.

Indico i lati dei due quadrati con x e y, perciò: $x+y=8$. Le dimensioni del rettangolo sono le diagonali dei quadrati, cioè: $x\sqrt{2}$ e $y\sqrt{2}$, perciò l'area del rettangolo è data da: $x\sqrt{2}\cdot y\sqrt{2}=30$, cioè: $xy=15$. Quindi otteniamo il sistema simmetrico:

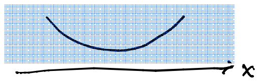
$$\begin{cases}x+y=8\\ xy=15\end{cases} \qquad z^2-8z+15=0 \qquad z_{1,2}=4\pm1=\left\langle\begin{matrix}5\\ 3\end{matrix}\right.$$

I due perimetri sono dati, quindi, da: $5\cdot4=\mathbf{20}$ e $3\cdot4=\mathbf{12}$.

12. $\frac{13+9x^2}{9} - \frac{2x-1}{2} - \frac{1}{3}(4x+1) > 0$

$$2(13+9x^2) - 9(2x-1) - 6(4x+1) > 0 \qquad 26 + 18x^2 - 18x + 9 - 24x - 6 > 0$$

$$18x^2 - 42x + 29 > 0 \qquad \frac{\Delta}{4} = 21^2 - 18 \cdot 29 < 0$$



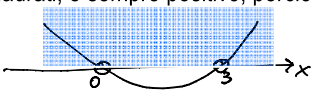
$\forall x \in \mathbb{R}$

13. $\frac{1}{x} < \frac{1}{x-3} + \frac{x^2-1}{x^2-3x}$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x-3} - \frac{x^2-1}{x(x-3)} < 0 \qquad \frac{x-3-x-(x^2-1)}{x(x-3)} < 0 \qquad \frac{-x^2-2}{x(x-3)} < 0 \qquad \frac{x^2+2}{x(x-3)} > 0$$

Il numeratore della frazione, dato da una somma di quadrati, è sempre positivo, perciò la disequazione diventa:

$$x(x-3) > 0$$



$x < 0 \quad \vee \quad x > 3$

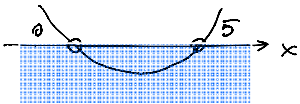
14. $\begin{cases} \frac{1}{x} > \frac{1}{x-5} \\ x(7-x) > 12 \\ -2x < 0 \end{cases}$

Risolvo ogni disequazione singolarmente:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x-5} > 0 \qquad \frac{x-5-x}{x(x-5)} > 0 \qquad -\frac{5}{x(x-5)} > 0 \qquad \frac{5}{x(x-5)} < 0$$

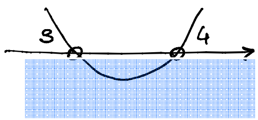
Siccome il numeratore è sempre positivo, sarà il segno del denominatore a determinare il segno della frazione:

$$x(x-5) < 0$$



$\mathbf{0 < x < 5}$

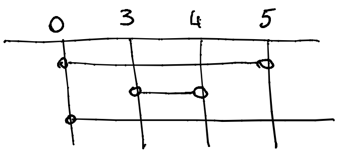
$$7x - x^2 > 12 \qquad x^2 - 7x + 12 < 0 \qquad x_{1,2} = \frac{7 \pm 1}{2} = \Big\langle \begin{array}{l} 3 \\ 4 \end{array}$$



$\mathbf{3 < x < 4}$

$-2x < 0 \qquad x > 0$

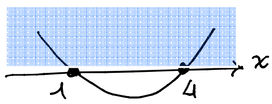
$$\begin{cases} 0 < x < 5 \\ 3 < x < 4 \\ x > 0 \end{cases}$$



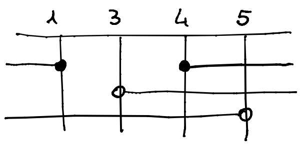
$3 < x < 4$

15. $\sqrt{(x-1)^2 - 3x + 3} + 3 < x$

$$\sqrt{x^2 - 5x + 4} < x - 3 \qquad \begin{cases} x^2 - 5x + 4 \geq 0 \\ x - 3 > 0 \\ x^2 - 5x + 4 < (x-3)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-1)(x-4) \geq 0 \\ x > 3 \\ x^2 - 5x + 4 < x^2 - 6x + 9 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x \leq 1 \quad \vee \quad x \geq 4 \\ x > 3 \\ x < 5 \end{cases}$$



$4 \leq x < 5$

16. $|x| - x^2 < \frac{1}{4}$

$$4x^2 - 4|x| + 1 > 0 \qquad (2|x|-1)^2 > 0 \qquad 2|x| - 1 \neq 0 \qquad |x| \neq \frac{1}{2}$$

$x \neq \pm\frac{1}{2}$