1. Semplifica la seguente espressione irrazionale, supponendo che la variabile rappresenti un numero positivo:

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{2}-\frac{2}{\sqrt{a}}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{a}}{2}+\frac{2}{\sqrt{a}}\right)\left(\frac{\sqrt{a}}{2}-\frac{2}{\sqrt{a}}\right)-\left(2\sqrt{\frac{2}{a}}-1\right)\left(2\sqrt{\frac{2}{a}}+2\right)+2\left(\sqrt[4]{\frac{2}{a}}\right)^2$$

$$=\frac{a}{4}+\frac{4}{a}-2-\left(\frac{a}{4}-\frac{4}{a}\right)-\left(\frac{8}{a}+4\sqrt{\frac{2}{a}}-2\sqrt{\frac{2}{a}}-2\right)+2\sqrt{\frac{2}{a}}=\frac{a}{4}+\frac{4}{a}-2-\frac{a}{4}+\frac{4}{a}-\frac{8}{a}-2\sqrt{\frac{2}{a}}+2+2\sqrt{\frac{2}{a}}=\mathbf{0}$$

2. Risolvi la seguente equazione frazionaria di secondo grado:

$$\left(\frac{x}{2x+1}-1\right)^2\left(1-\frac{1}{x+1}\right)^2+\left(\frac{x}{2x+1}-1\right)\left(1-\frac{1}{x+1}\right)=0$$

$$\left(\frac{x-2x-1}{2x+1}\right)^2\left(\frac{x+1-1}{x+1}\right)^2+\frac{x-2x-1}{2x+1}\cdot\frac{x+1-1}{x+1}=0 \qquad C.A.: x\neq -1 \quad \wedge \quad x\neq -\frac{1}{2}$$

$$\frac{(x+1)^2}{(2x+1)^2}\cdot\frac{x^2}{(x+1)^2}-\frac{x+1}{2x+1}\cdot\frac{x}{x+1}=0 \qquad \left(\frac{x}{2x+1}\right)^2-\frac{x}{2x+1}=0 \qquad Pongo: \frac{x}{2x+1}=t$$

$$t^2-t=0 \qquad t\,(t-1)=0 \qquad t_1=0 \qquad \frac{x}{2x+1}=0 \qquad \boldsymbol{x=0}$$

$$t_2=1 \qquad \frac{x}{2x+1}=1 \qquad x-2x-1=0 \qquad x=-1 \quad non\ acc.$$

3. Determina un numero naturale di due cifre, con la cifra delle unità minore della cifra delle decine, sapendo che le cifre sono due numeri consecutivi e che la differenza tra i quadrati del numero stesso e del numero che si ottiene scambiando le cifre è 495.

Indico con x la cifra delle decine e con y la cifra delle unità, perciò il numero è dato da: $N=10x+y$.

Le condizioni poste sono quindi: $\begin{cases} x=y+1 \\ (10x+y)^2-(10y+x)^2=495 \end{cases}$. Sostituisco x nella seconda equazione e procedo scomponendo la differenza di quadrati come prodotto della somma per la differenza tra due monomi:

$$(10\,y+10+y)^2-(10\,y+y+1)^2=495 \qquad (11\,y+10)^2-(11\,y+1)^2=495$$

$$(11\,y+10-11\,y-1)(11\,y+10+11\,y+1)=495 \qquad 9\,(22\,y+11)=495$$

$$22\,y+11=55 \qquad 11\,(2y+1)=55 \qquad 2y+1=5 \qquad 2y=4 \qquad y=2$$

Il numero richiesto è **32**.

4. Considera l'equazione $(k-2)\,x^2-4x+k-2=0$, con $k\neq 2$. Determina per quali valori di k:
   A. ammette soluzioni reali;
   B. una delle soluzioni dell'equazione è -3;
   C. ammette soluzioni reali la cui somma è uguale a 4;
   D. ammette soluzioni reali e reciproche;
   E. ammette soluzioni reali, tali che la somma dei loro quadrati è 7.

A. Perché ammetta soluzioni reali, il discriminante deve essere maggiore o uguale a zero: $\frac{\Delta}{4}\geq 0$:

$$4-(k-2)^2\geq 0 \qquad (2-k+2)(2+k-2)\geq 0 \qquad k\,(4-k)\geq 0 \qquad \boldsymbol{0\leq k\leq 4}$$

Perché ci siano due soluzioni, ovvero perché si tratti di un'equazione di secondo grado, abbiamo come condizioni: $0\leq k\leq 4 \wedge k\neq 2$.

B. Sostituisco -3 nell'equazione di secondo grado al posto della x. Ottengo un'equazione di primo grado in k:

$$9k-18+12+k-2=0 \qquad 10k=8 \qquad \boldsymbol{k=\frac{4}{5}} \quad acc.$$

C. $x_1+x_2=4 \qquad -\frac{b}{a}=4 \qquad \frac{4}{k-2}=4 \qquad k-2=1 \qquad \boldsymbol{k=3}$

D. $x_1=\frac{1}{x_2} \qquad x_1x_2=1 \qquad \frac{c}{a}=1 \qquad \frac{k-2}{k-2}=1 \qquad 1=1 \qquad \boldsymbol{0\leq k\leq 4 \wedge k\neq 2}$

E. $x_1^2+x_2^2=7 \qquad (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=7 \qquad \left(\frac{4}{k-2}\right)^2-2=7 \qquad \left(\frac{4}{k-2}\right)^2=9 \qquad \frac{4}{k-2}=\pm 3 \qquad \boldsymbol{k=\frac{10}{3}} \quad \boldsymbol{k=\frac{2}{3}}$

5. Sono dati due quadrati diversi e il secondo quadrato ha area doppia del primo. Sapendo che la somma dei lati dei quadrati è 10 cm, determina la lunghezza del lato del quadrato più piccolo.

Indicando con x il lato del quadrato più piccolo e con y il lato del quadrato più grande. Visto che la somma dei lati dei quadrati è 10 cm, abbiamo che $x+y=10$, ovvero $y=10-x$. Il quadrato di lato y ha area doppia del quadrato di lato x, ovvero $y^2=2x^2$. Sostituendo y, abbiamo un'equazione di secondo grado in x:

$$(10-x)^2=2x^2 \qquad 10-x=x\sqrt{2}$$

Avendo il quadrato di entrambi i membri, posso estrarre la radice, ma mantengo solo la soluzione positiva, visto che x è la lunghezza di un lato, e quindi positiva, e $10-x>0$:

$$x+x\sqrt{2}=10 \qquad x(1+\sqrt{2})=10 \qquad x=\frac{10}{1+\sqrt{2}}\,cm=\mathbf{10\,(\sqrt{2}-1)\,cm}$$

6. Risolvi la seguente equazione di secondo grado:

$$\left(x\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2-4x\sqrt{2}\left(x\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)=\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)-\left(x-\sqrt{6}\right)^2$$

$$3x^2+2-2x\sqrt{6}-8x^2+4x\sqrt{6}=x^2-2-x^2-6+2x\sqrt{6}$$

$$-5x^2+10=0 \qquad x^2=2 \qquad x=\pm\sqrt{2}$$

7. Risolvi la seguente disequazione frazionaria, dopo averla ridotta a forma normale:

$$\frac{x+2}{3x-1}-\frac{x+1}{3x}<\frac{1}{9x^2-3x}-1$$

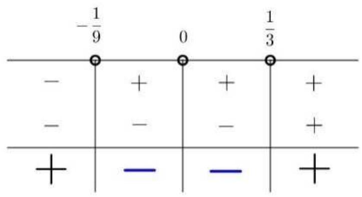
$$\frac{x+2}{3x-1}-\frac{x+1}{3x}-\frac{1}{3x(3x-1)}+1<0 \qquad \frac{3x\,(x+2)-(x+1)(3x-1)-1+9x^2-3x}{3x\,(3x-1)}<0$$

$$\frac{3x^2+6x-3x^2+x-3x+1-1+9x^2-3x}{x\,(3x-1)}<0 \qquad \frac{9x^2+x}{x\,(3x-1)}<0 \qquad \frac{x\,(9x+1)}{x\,(3x-1)}<0$$

$$\frac{9x+1}{3x-1}<0 \qquad C.A.: x\neq 0$$

$$N>0:\ x>-\frac{1}{9}$$

$$D>0:\ x>\frac{1}{3}$$



$$-\frac{1}{9}<x<0 \quad \vee \quad 0<x<\frac{1}{3}$$

8. Risolvi il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} x^2-x+1>0 \\ x^3+4x\leq 0 \\ x^2-4x\leq 0 \end{cases}$$

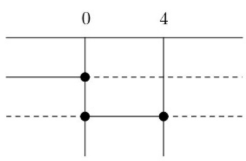
La prima disequazione è facilmente risolvibile: trattandosi di un falso quadrato, è sempre positivo, ovvero $x^2-x+1>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$. Procediamo, quindi, con la soluzione delle altre due disequazioni:

$$x^3+4x\leq 0 \qquad x\,(x^2+4)\leq 0 \qquad x\leq 0$$

x^2+4 è una somma di due quadrati, quindi sempre positivo, perciò il segno del prodotto è stabilito dal primo fattore, x.

$$x\,(x-4)\leq 0 \qquad 0\leq x\leq 4$$

$$\begin{cases} x\leq 0 \\ 0\leq x\leq 4 \end{cases}$$

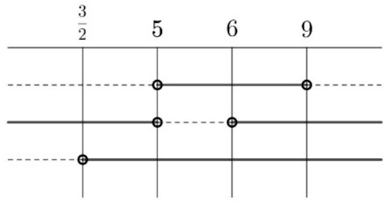


$$x=0$$

9. Risolvi il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} x^2 - 14\,x + 45 < 0 \\ x^2 - 11\,x + 30 > 0 \\ 2x - 3 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-5)(x-9) < 0 \\ (x-6)(x-5) > 0 \\ x > \dfrac{3}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} 5 < x < 9 \\ x < 5 \quad \vee \quad x > 6 \\ x > \dfrac{3}{2} \end{cases}$$



$$\boldsymbol{6 < x < 9}$$

10. Risolvi il seguente sistema frazionario di secondo grado:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y-1} = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \qquad C.A.: x \neq 0 \quad \wedge \quad y \neq 1$$

$$\begin{cases} x = 1 - y \\ \dfrac{1}{1-y} + \dfrac{1}{y-1} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 - y \\ \dfrac{1}{-(-1+y)} + \dfrac{1}{y-1} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 - y \\ -\dfrac{1}{y-1} + \dfrac{1}{y-1} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 - y \\ 0 = 1 \end{cases} \qquad \boldsymbol{impossibile}$$

11. Risolvi il seguente sistema con il metodo che ritieni più opportuno:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4x + 6 \\ x^2 + 6x = 4y^2 - 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 6 = 0 \\ x^2 - 4y^2 + 6x + 9 = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \begin{cases} 4x^2 + 4y^2 - 16x - 24 = 0 \\ x^2 - 4y^2 + 6x + 9 = 0 \end{cases} \\ \hline \quad 5x^2 - 10x - 15 = 0 \end{array} \qquad \begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0 \\ y^2 = -x^2 + 4x + 6 \end{cases}$$

$$x_{1,2} = 1 \pm 2 \qquad \begin{cases} x = -1 \\ y^2 = -1 - 4 + 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y^2 = 1 \end{cases} \qquad \boldsymbol{(-1; 1)} \quad \boldsymbol{(-1; -1)}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y^2 = -9 + 12 + 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y^2 = 9 \end{cases} \qquad \boldsymbol{(3; 3)} \quad \boldsymbol{(3; -3)}$$

12. Calcola la probabilità di estrarre dal sacchetto della tombola:
    A. un numero primo, sapendo che la somma delle cifre del numero estratto è uguale a 7;
    B. un quadrato perfetto, sapendo che il numero estratto termina per 6.

A. I numeri della tombola che hanno la somma delle cifre uguale a 7 sono: 7, 16, 25, 34, 43, 52, 61, 70. Tra di essi, solo 7, 43 e 61 sono primi, ovvero 3 su 8 e la probabilità richiesta è, quindi: $\boldsymbol{\frac{3}{8}}$.

B. I quadrati perfetti sono: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81. Tra di essi, quelli che terminano per 6 sono solo due, 16 e 36, ovvero 2 su 9 e la probabilità richiesta è, quindi: $\boldsymbol{\frac{2}{9}}$.

13. Schiacciando a caso per quattro volte i tasti numerici della calcolatrice, qual è la probabilità di scrivere il numero 2020?

Ogni volta che schiaccio un tasto, ho una probabilità su 10 di indovinare la cifra giusta. Per indovinare tutte e quattro le cifre giuste, nell'ordine richiesto, la probabilità è:

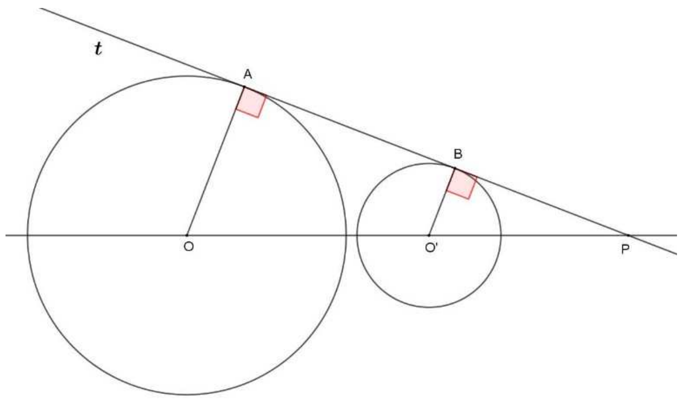
$$\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \left(\frac{1}{10}\right)^4 = \boldsymbol{\frac{1}{10000}}$$

14. Una confezione di dodici componenti elettrici contiene quattro pezzi difettosi. Con quale probabilità può accadere che due componenti estratti a caso, senza reinserimento, siano entrambi utilizzabili?

Nella prima estrazione ho 8/12 probabilità di estrarre un componente utilizzabile. Nella seconda estrazione, visto che non c'è reinserimento, sono rimasti sette componenti utilizzabili e 11 componenti in totale, ovvero:

$$\frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} = \boldsymbol{\frac{14}{33}}$$

15. Considera due circonferenze esterne di centri O e O'. Una retta t è tangente alla circonferenza di centro O in A e alla circonferenza di centro O' in B. Inoltre, la retta t incontra la retta OO' in P. Dimostra che gli angoli $A\hat{O}P$ e $B\widehat{O'}P$ sono congruenti.



Ipotesi:
$\mathcal{C}, O, r$
$\mathcal{C}', O', r'$
$\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \{\ \}$
$t \cap \mathcal{C} = \{A\}$
$t \cap \mathcal{C}' = \{B\}$
$t \cap \overline{OO'} = \{P\}$

Testi:
$A\hat{O}P \cong B\widehat{O'}P$

Dimostrazione:
Nella circonferenza $\mathcal{C}$, il raggio AO, tracciato in modo che passi per il punto di tangenza, è perpendicolare alla retta t. Allo stesso modo, il raggio BO' è perpendicolare a t. Essendo entrambi perpendicolari a una stessa retta, $\overline{AO} \parallel \overline{BO'}$.
Consideriamo, quindi, le due rette parallele AO e BO', tagliate dalla trasversale OO'. Due rette parallele formano, con una trasversale, angoli corrispondenti congruenti e $A\hat{O}P \cong B\widehat{O'}P$, in quanto angoli corrispondenti.

16. Scegli **uno** dei seguenti problemi:

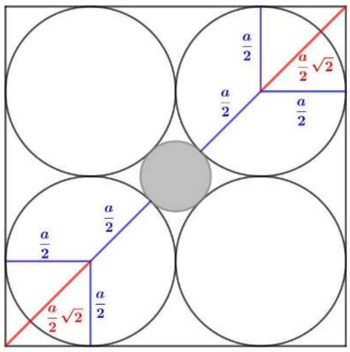
A. Determina l'area del cerchio più piccolo (in grigio nella figura), sapendo che la misura del lato del quadrato è $2a$ e che i quattro cerchi rappresentati sono tangenti esternamente tra loro e ai lati del quadrato.

Per determinare l'area del cerchio, dobbiamo determinarne la misura del raggio. In un quadrato di lato $2a$, la diagonale misura $2a\sqrt{2}$. Consideriamo quindi metà diagonale e sottraiamo il raggio della circonferenza grande e la diagonale del quadrato di lato pari al raggio della circonferenza grande (come indicato nella figura).
Perciò:

$$r = a\sqrt{2} - \frac{a}{2} - \frac{a}{2}\sqrt{2} = \frac{a}{2}\left(\sqrt{2} - 1\right)$$

Ora possiamo determinare l'area:

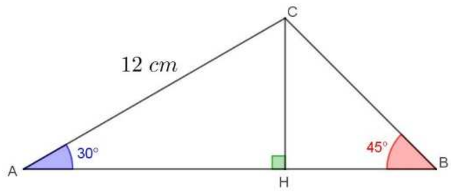
$$A = \pi r^2 = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}\left(3 - 2\sqrt{2}\right)}$$



B. Determina l'area del triangolo della figura.

Tracciamo l'altezza CH relativa al lato AB (come indicato nella figura). Il triangolo AHC è metà di un triangolo equilatero, perciò $\overline{CH} = 6\ cm$ e, per il teorema di Pitagora, $\overline{AH} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CH}^2} = 6\sqrt{3}\ cm$. Possiamo, quindi, determinare l'area del triangolo AHC:

$$A_{AHC} = \frac{1}{2} 6\ cm \cdot 6\sqrt{3}\ cm = 18\sqrt{3}\ cm^2$$



È semplice determinare l'area del triangolo HBC, visto che è un triangolo rettangolo isoscele, perciò $\overline{CH} = \overline{HB}$:

$$A_{HBC} = \frac{1}{2} 6\ cm \cdot 6\ cm = 18\ cm^2$$

Possiamo calcolare l'area totale:

$$A = A_{AHC} + A_{HBC} = \boldsymbol{18\left(\sqrt{3} + 1\right)\ cm^2}$$