PROBLEMA 1

È data la parabola di equazione $y = x^2 + x$. Rappresentala in un sistema di assi cartesiani ortogonali.

a. Determina le equazioni della trasformazione *t* ottenuta dalla composizione della traslazione di vettore $\vec{v}\,(2;1)$ e dalla rotazione di 90° in senso orario e con centro nell'origine.

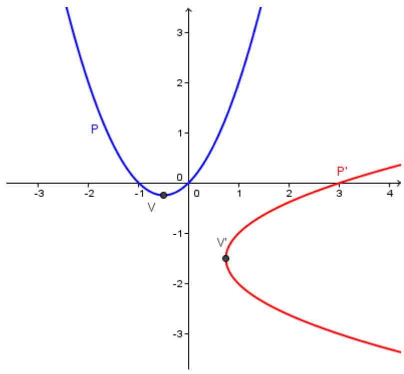
b. Applica alla parabola P la trasformazione *t* e rappresenta la nuova parabola P' nello stesso sistema di assi cartesiani.

c. Determina le equazioni della trasformazione *t₁* ottenuta componendo in ordine inverso le trasformazioni di cui al punto a) e verifica che la composizione non è commutativa.

d. Discuti le intersezioni della parabola P con la generica retta $y = k$, al variare di *k*.

e. Determina l'area della regione di piano compresa tra la parabola P e la bisettrice di secondo e quarto quadrante.

Si tratta della parabola con asse parallelo all'asse y, passante per l'origine con vertice $V\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)$.



a. $t_{\vec{v}}:\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y + 1 \end{cases}$ $\qquad r:\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$

$$\boldsymbol{t}:\begin{cases} \boldsymbol{x' = y + 1} \\ \boldsymbol{y' = -x - 2} \end{cases}$$

b. $t^{-1}:\begin{cases} y = x' - 1 \\ x = -y' - 2 \end{cases}$

$y = x^2 + x \qquad x - 1 = (-y-2)^2 - y - 2 \qquad \boldsymbol{x = y^2 + 3y + 3}$

Si tratta della parabola con asse parallelo all'asse x, con vertice $V'\left(\frac{3}{4};-\frac{3}{2}\right)$.

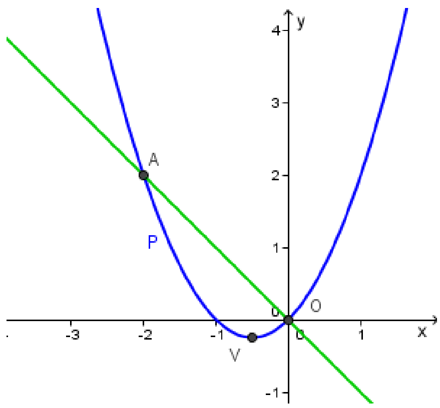
c. $\boldsymbol{t_1}:\begin{cases} \boldsymbol{x' = y + 2} \\ \boldsymbol{y' = -x + 1} \end{cases}$ $\qquad t_1 \neq t$, perciò la composizione non è commutativa

d. $\begin{cases} y = x^2 + x \\ y = k \end{cases}$

Impongo il passaggio del fascio di rette per il vertice della parabola:
$k = -\frac{1}{4}$

Per $k = 0$ ho l'asse x, perciò:

$$\boldsymbol{2\ soluzioni\ per\ k \geq -\frac{1}{4}}$$



e. Determino innanzi tutto le coordinate dei punti di intersezione tra la parabola e la bisettrice di secondo e quarto quadrante:

$$\begin{cases} y = x^2 + x \\ y = -x \end{cases} \qquad x^2 + 2x = 0 \qquad x\,(x+2) = 0$$

$$A\,(-2;2) \qquad O\,(0;0)$$

Considerando una generica retta parallela ad AO, di equazione $y = -x + q$, e imponendo la condizione di tangenza alla parabola, ottengo la tangente t:

$$\begin{cases} y = x^2 + x \\ y = -x + q \end{cases} \qquad x^2 + 2x - q = 0 \qquad \frac{\Delta}{4} = 1 + q = 0 \qquad q = -1$$

$$t: y = -x - 1$$

Calcolo la distanza del punto O dalla retta t:

$$d(O;t) = \frac{|-1|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Calcolo la lunghezza del segmento AO e, potendo calcolare l'area del rettangolo così determinato, sapendo che l'area del segmento parabolico è 2/3 di quella del rettangolo, ho risolto il quesito:

$$AO = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \qquad Area = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2\sqrt{2} = \boldsymbol{\frac{4}{3}}$$

PROBLEMA 2

È data la semicirconferenza di diametro $\overline{CB} = 4l$. Sia H il punto medio dell'arco $\widehat{CB}$. Sul prolungamento di BH dalla parte di H considera il punto A tale che $\overline{AH} = l\sqrt{2}$. Sia D il punto di intersezione fa la parallela ad AB passante per C e la perpendicolare per A ad AB.

a. Determina la misura del raggio della circonferenza quando il perimetro del trapezio ABCD misura $3\sqrt{2}+2$.

b. Esprimi la funzione

$$f(x) = \frac{\overline{CP} - \overline{PB}}{\overline{HM}}$$

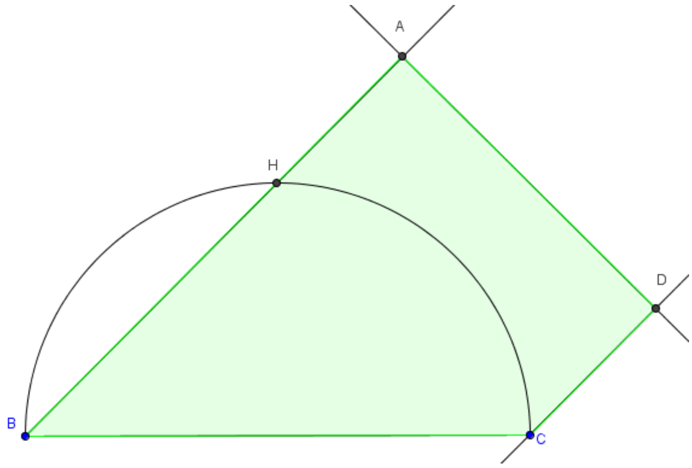
con P appartenente all'arco $\widehat{HB}$, $P\hat{C}B = x$ e M intersezione tra CP e HB.

c. Rappresenta graficamente $\mathrm{f(x)}$, tenendo conto dei limiti imposti dal problema.

a. $\overline{BC} = 4l$ e viene dato dal problema.

Siccome H è il punto medio della semicirconferenza, BH forma un angolo di 45° con BC ed è pari al lato del quadrato che ha per diagonale BC, perciò: $\overline{BH} = 2l\sqrt{2}$.
$\overline{HA} = l\sqrt{2}$ e viene dato dal problema.

$AD \perp AB \quad \Rightarrow \quad AD \parallel HC$ perché entrambi formano un angolo di 45° con BC o il suo prolungamento. Perciò HCDA è un rettangolo e le dimensioni sono:



$$\overline{DC} = l\sqrt{2} \qquad \overline{AD} = \overline{HC} = \overline{BH} = 2l\sqrt{2}$$

Perciò il perimetro del trapezio è:

$$2p = 2l\sqrt{2} + l\sqrt{2} + 2l\sqrt{2} + l\sqrt{2} + 4l = 6l\sqrt{2} + 4l$$

Ponendolo uguale al perimetro dato:

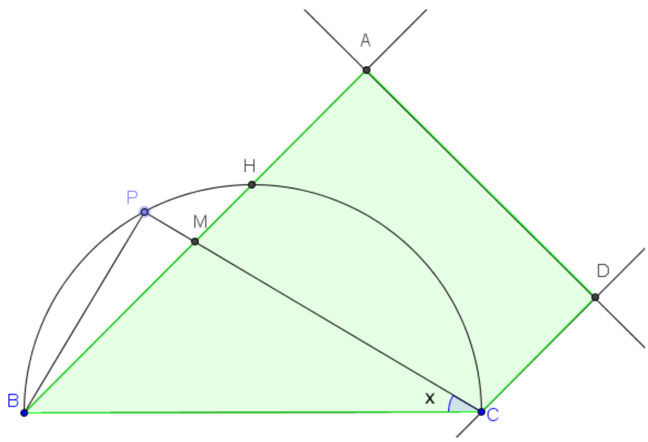
$$6l\sqrt{2} + 4l = 3\sqrt{2} + 2$$

Da cui si deduce: $l = \frac{1}{2}$ e dato che il diametro della semicirconferenza è $4l$, allora il raggio è **1**.

b. Cominciamo dalle limitazioni dell'angolo x: P può arrivare a coincidere con B ($x = 0°$), oppure con H ($x = 45°$), perciò:

$$\mathbf{0° \leq x \leq 45°}$$

$$\overline{CP} = 4l\cos x = 2\cos x$$
$$\overline{PB} = 4l\,sen\,x = 2\,sen\,x$$



Per determinare HM, posso determinare MB che è l'ipotenusa del triangolo rettangolo BMP, in cui l'angolo acuto BMP è:

$$B\widehat{M}P = M\hat{B}C + B\hat{C}M$$

per il teorema dell'angolo esterno, perciò:

$$B\widehat{M}P = 45° + x$$

Perciò:

$$\overline{PB} = \overline{MB}\,sen\,(45° + x) \qquad \overline{MB} = \frac{\overline{PB}}{sen\,(45° + x)}$$

E, per differenza, posso determinare HM:

$$\overline{HM} = \overline{BH} - \overline{MB} = 2l\sqrt{2} - \frac{4l\,sen\,x}{sen\,(45° + x)}$$

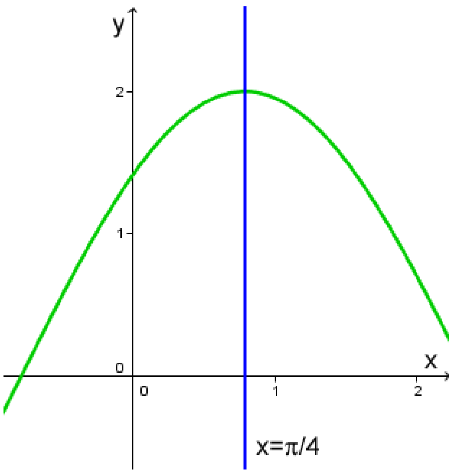
Sostituendo ottengo la funzione:

$$f(x)=\frac{\overline{CP}-\overline{PB}}{\overline{HM}}=\frac{2\cos x-2\,sen\,x}{\sqrt{2}-\dfrac{2\,sen\,x}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}sen\,x}}=\frac{2\,(\cos x-sen\,x)}{\dfrac{\sqrt{2}\cos x+\sqrt{2}\,sen\,x-2\sqrt{2}\,sen\,x}{\cos x+sen\,x}}=$$

$$=\frac{2\,(\cos x-sen\,x)(\cos x+sen\,x)}{\sqrt{2}\,(\cos x-\ sen\,x)}=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\ (\cos x+sen\,x)=2\,sen\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$$

$$\boldsymbol{f(x)=2\,sen\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}$$

c. La funzione va rappresentata con $0\le x\le\frac{\pi}{4}$ ed è una traslazione della funzione seno:

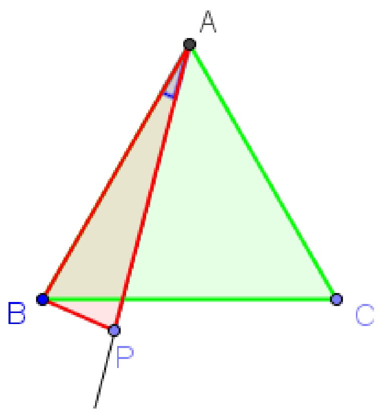


La traslazione la otteniamo spostando la funzione verso sinistra di $\frac{\pi}{4}$.

QUESTIONARIO

1. Dal vertice A del triangolo equilatero ABC di lato l traccia una semiretta secante il triangolo e fissa su di essa il punto P tale che $\overline{AP}=l$. Calcola le ampiezze degli angoli del triangolo ABP, sapendo che è valida la seguente relazione fra le aree dei due triangoli: $S_{ABC}=\sqrt{3}\,S_{ABP}$.

Indichiamo con x l'angolo $B\hat{A}P$. Possiamo quindi determinare l'area del triangolo ABP:



$$\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot sen\,60°=\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AP}\cdot sen\,x$$

$$senx=\frac{sen\,60°}{\sqrt{3}}\qquad sen\,x=\frac{1}{2}\qquad x=30°$$

Il triangolo ABP è un triangolo isoscele, visto che ha due lati congruenti, perciò gli angoli alla base valgono:

$$A\hat{B}P\cong B\hat{P}A=\frac{180°-30°}{2}=75°$$

Gli angoli del triangolo sono quindi: **75°, 75°, 30°**.

2. Sia data la funzione $f(x) = sen\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$. Se ne determini il periodo.

(Tratto dal Problema 1, Esame di Stato 2012 sessione ordinaria)

La funzione goniometrica $f(x) = sen\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$ ammette periodo P se risulta: $f(x+P) = f(x)$, quindi:

$$sen\left(\frac{3}{2}\pi\,(x+P)\right) = sen\left(\frac{3}{2}\pi x\right) \quad\Rightarrow\quad \frac{3}{2}\pi\,(x+P) = \frac{3}{2}\pi x + 2\pi \quad\Rightarrow\quad \frac{3}{2}\pi\,P = 2\pi \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{P = \frac{4}{3}}$$

3. Si determini il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{tg\,x}$.

Perché la funzione esista, il radicando non deve essere negativo:

$$tg\,x \geq 0 \qquad\qquad \boldsymbol{k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi}$$

4. Il numero delle combinazioni di *n* oggetti a 4 a 4 è uguale al numero delle combinazioni degli stessi oggetti a 3 a 3. Si trovi *n*.

(Quesito 4, Esame di Stato 2011 sessione ordinaria)

La richiesta del testo si risolve con le combinazioni semplici:

$$C_{n,4} = C_{n,3}, \qquad n\epsilon\mathbb{N}$$

ovvero, esplicitando i termini:

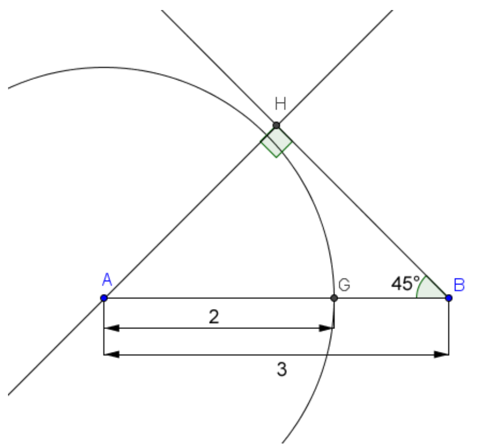
$$\binom{n}{4} = \binom{n}{3} \quad\Rightarrow\quad \frac{n!}{4!\;(n-4)!} = \frac{n!}{3!\;(n-3)!} \qquad con\; n \geq 4$$

$$\frac{1}{4\,(n-4)!} = \frac{1}{(n-3)\,(n-4)!} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{4} = \frac{1}{n-3}$$

$$n-3 = 4 \quad\Rightarrow\quad n = \mathbf{7}$$

Soluzione accettabile, viste le condizioni di accettabilità.

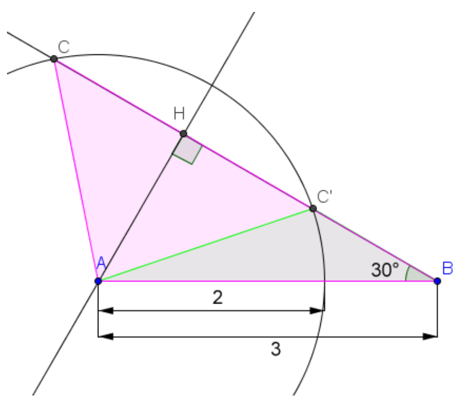
5. Si provi che non esiste un triangolo ABC con $\overline{AB} = 3$, $\overline{AC} = 2$ e $A\hat{B}C = 45°$. Si provi altresì che se $\overline{AB} = 3$, $\overline{AC} = 2$ e $A\hat{B}C = 30°$, allora esistono due triangoli che soddisfano queste condizioni.



(Quesito 9, Esame di Stato 2010 sessione ordinaria)

Consideriamo un segmento AB di lunghezza 3 e una semiretta uscente da B che formi un angolo di 45° con il segmento. Determiniamo la distanza AH dalla semiretta così costruita:

$$\overline{AH} = \overline{AB}\;sen\;45° = 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} > 2$$



Come si evince anche dal disegno, la distanza AH, presa perpendicolarmente, è maggiore della lunghezza 2 prevista per il segmento $\overline{AC}$, perciò non esiste un triangolo che abbia le caratteristiche richieste.

Nel caso in cui l'angolo sia di 30°, invece:

$$\overline{AH} = \overline{AB}\;sen\;30° = 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2} < 2$$

Perciò ci sono due triangoli che possono soddisfare le richieste, come indicato in figura.

6. Le misure dei lati di un triangolo sono 40, 60 e 80 cm. Si calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ampiezze degli angoli del triangolo approssimandole in gradi e primi sessagesimali.

(Quesito 2, Esame di Stato 2007 sessione ordinaria)

$$\overline{AB} = 40\ cm \qquad \overline{BC} = 60\ cm \qquad \overline{CA} = 80\ cm$$

Determiniamo le misure degli angoli, usando il teorema del coseno:

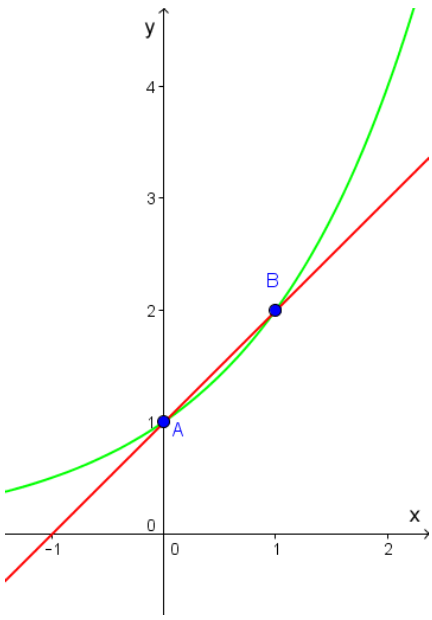
$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 - 2\overline{BC}\cdot\overline{CA}\cdot\cos\gamma$$

$$\cos\gamma = \frac{\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 - \overline{AB}^2}{2\overline{BC}\cdot\overline{CA}} = \frac{7}{8} \qquad \Rightarrow \qquad \gamma \approx \mathbf{28°57'}$$

$$\cos\beta = \frac{\overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2}{2\overline{BC}\cdot\overline{AB}} = -\frac{1}{4} \qquad \Rightarrow \qquad \beta \approx \mathbf{104°29'}$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2}{2\overline{AC}\cdot\overline{AB}} = \frac{11}{16} \qquad \Rightarrow \qquad \beta \approx \mathbf{46°34'}$$

7. Si risolva l'equazione $2^x - x - 1 = 0$.



Per risolvere l'equazione, procediamo con la soluzione grafica, come intersezione tra una funzione esponenziale e una retta:

$$\begin{cases} y = 2^x \\ y = x + 1 \end{cases}$$

Dal grafico, si evince che due punti soddisfano il sistema:

$$A\ (0;1) \qquad B\ (1;2)$$

Ovvero, le soluzioni dell'equazioni sono:

$$\boldsymbol{x_1 = 0} \quad \vee \quad \boldsymbol{x_2 = 1}$$

8. Si consideri la seguente uguaglianza: $\ln\,(2x+1)^4 = 4\ln\,(2x+1)$. È vero o falso che vale per ogni x reale? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

(Quesito 9, Esame di Stato 2006 sessione suppletiva)

Il primo membro è verificato per $2x + 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq -\frac{1}{2}$

Il secondo membro è verificato per $2x + 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > -\frac{1}{2}$

L'uguaglianza è verificata, in quanto deriva dalla proprietà dei logaritmi: $\log_a b^c = c \cdot \log_a b$, ma solo per $x > -\frac{1}{2}$.

9. Alberto e Gianna sono chiamati a risolvere la seguente equazione: $senx\ cosx = \frac{1}{4}$. Alberto ottiene come soluzione gli angoli x tali che: $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ oppure $x = \frac{5}{12}\pi + k\pi$ (k intero qualsiasi); Gianna trova la seguente soluzione: $x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$ (k intero qualsiasi). È vero o è falso che Alberto ha risolto correttamente e Gianna no? Fornire una risposta esauriente.

(Quesito 3, Esame di Stato 2005 sessione suppletiva)

Risolviamo innanzi tutto l'equazione:

$$senx\ cosx = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad 2\ senx\ cosx = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad sen\ 2x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 2x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{5}{12}\pi + k\pi \end{array}$$

Come si vede, alla soluzione corrisponde a quella di Alberto.

Per quanto riguarda la soluzione di Gianna, consideriamo i due casi:

$$Se\ k\ pari: k = 2k', k' \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad x = (-1)^{2k'}\frac{\pi}{12} + 2k'\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{12} + k'\pi$$

$$Se\ k\ dispari: k = 2k'+1, k' \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad x = (-1)^{2k'+1}\frac{\pi}{12} + (2k'+1)\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} + k'\pi \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5}{12}\pi + k'\pi$$

Come si vede, anche questa soluzione è equivalente a quella di Alberto, perciò sono entrambe corrette. Quindi è **falso** che Alberto ha risolto correttamente e Gianna no.

10. Le parti letterali dei termini dello sviluppo del binomio $(a+b)^{10}$, ordinati secondo le potenze decrescenti di a e crescenti di b, sono rispettivamente:

$$a^{10}, a^9b, a^8b^2, a^7b^3, a^6b^4, a^5b^5, a^4b^6, a^3b^7, a^2b^8, ab^9, b^{10}$$

Elencare i loro coefficienti e giustificare in modo esauriente la risposta.

(Quesito 9, Esame di Stato 2005 sessione suppletiva)

Svolgiamo il binomio tramite la formula di Newton:

$$(a+b)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} a^{10-k}\, b^k$$

Determiniamo quindi i coefficienti binomiali:

$$\binom{10}{0} = \mathbf{1};\ \binom{10}{1} = \frac{10!}{1!9!} = \mathbf{10};\ \binom{10}{2} = \frac{10!}{2!8!} = \mathbf{45};$$

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!\,7!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2} = \mathbf{120}; \quad \binom{10}{4} = \frac{10!}{4!\,6!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2} = \mathbf{210};$$

$$\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!\,5!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} = \mathbf{252}; \quad \binom{10}{6} = \frac{10!}{4!\,6!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2} = \mathbf{210};$$

$$\binom{10}{7} = \frac{10!}{3!\,7!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2} = \mathbf{120}; \quad \binom{10}{8} = \frac{10!}{2!\,8!} = \mathbf{45};$$

$$\binom{10}{9} = \frac{10!}{1!\,9!} = \mathbf{10}; \quad \binom{10}{10} = 1$$

Oppure, possiamo risolvere la questione con il triangolo di Tartaglia:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1