1. $\sqrt{2x^2-7x+3} \geq x-3$

$$\begin{cases} 2x^2-7x+3 \geq (x-3)^2 \\ x-3 \geq 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x-3<0 \\ 2x^2-7x+3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2-7x+3 \geq x^2-6x+9 \\ x \geq 3 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x<3 \\ x_{1,2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{49-24}}{4} = \left\langle \begin{matrix} 3 \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-x-6 \geq 0 \\ x \geq 3 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x<3 \\ x \leq \dfrac{1}{2} \quad \vee \quad x \geq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \left\langle \begin{matrix} 3 \\ -2 \end{matrix} \right. \\ x \geq 3 \end{cases} \quad \vee \quad x \leq \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} x \leq -2 \quad \vee \quad x \geq 3 \\ x \geq 3 \end{cases} \quad \vee \quad x \leq \frac{1}{2}$$

$$\boldsymbol{x \leq \frac{1}{2}} \quad \vee \quad \boldsymbol{x \geq 3}$$

2. $\sqrt{4x^2+1} = 2x-1$

$$C.C.S.: 2x-1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq \frac{1}{2}$$

Elevo a quadrato entrambi i membri: $4x^2+1 = 4x^2-4x+1$

La soluzione $x=0$ non è accettabile per le condizioni di concordanza del segno, perciò: **impossibile**.

3. $\sqrt{3x+1} + \sqrt{2x} + \sqrt{x-3} = 0$

L'equazione è **impossibile**, perché i tre radicali sono sempre positivi e la loro somma non può essere nulla. Inoltre non esiste un valore che annulli tutti e tre i radicali contemporaneamente.

4. $\sqrt{4x-1} < -2$

L'equazione è **impossibile**, perché un radicale, in quanto positivo, non può essere minore di un numero negativo.

5. $\sqrt{5x+7} > -3$

Vale per le condizioni di accettabilità del radicando, visto che un radicale di indice pari è sempre maggiore di un numero negativo:

$$5x + 7 \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{x \geq -\frac{7}{5}}$$

6. $\sqrt[3]{x^3 - 6x^2} = x - 2$

$$\left(\sqrt[3]{x^3 - 6x^2}\right)^3 = (x-2)^3$$
$$x^3 - 6x^2 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$
$$12x - 8 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{x = \frac{2}{3}}$$

7. Determina la probabilità che, estraendo una carta da un mazzo di 52, esca una carta di cuori o una figura.

$$p\ (cuori) = \frac{13}{52} \qquad p\ (figura) = \frac{12}{52} \qquad p\ (cuori \cap figura) = \frac{3}{52}$$

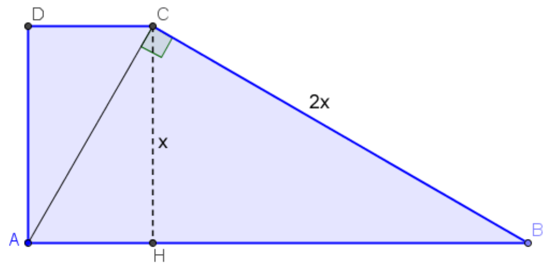
$$p(cuori \cup figura) = p(cuori) + p(figura) - p\ (cuori \cap figura) = \frac{13}{52} + \frac{12}{52} - \frac{3}{52} = \frac{22}{52} = \boldsymbol{\frac{11}{26}}$$

8. Calcola la probabilità che, lanciando un dado e estraendo una carta da un mazzo di 40, esca in entrambi un multiplo di 3.

$$p\ (dado) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \qquad p\ (carta) = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$$

$$p = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10} = \boldsymbol{\frac{1}{10}}$$

9. In un trapezio rettangolo il lato obliquo è doppio dell'altezza e la diagonale minore – perpendicolare al lato obliquo – è doppia della base minore.
   A. Sapendo che la diagonale minore è lunga 8 cm, calcola il perimetro del trapezio.
   B. Sapendo che il perimetro del trapezio vale $\left(5+3\sqrt{3}\right)\,cm$, calcolane l'area.



A.

$$\overline{AH}=\overline{DC}=\frac{1}{2}\overline{AC}=4cm$$

Posso quindi determinare l'altezza CH con il teorema di Pitagora:

$$\overline{CH}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{AH}^2}=4\sqrt{3}\,cm$$

Perciò il lato BC è $8\sqrt{3}\,cm$ e posso determinare, con il teorema di Pitagora, il lato HB e quindi poi il perimetro:

$$\overline{BH}=\sqrt{\overline{BC}^2-\overline{CH}^2}=12\,cm$$

$$2p=\overline{AH}+\overline{HB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA}=4\,cm+12\,cm+8\sqrt{3}\,cm+4\,cm+4\,\sqrt{3}\,cm=\mathbf{4\left(5+3\sqrt{3}\right)\,cm}$$

B. Indico con x l'altezza CH e con 2x il lato obliquo CB. Posso determinare HB con il teorema di Pitagora:

$$\overline{BH}=\sqrt{\overline{BC}^2-\overline{CH}^2}=x\sqrt{3}$$

Vale il secondo teorema di Euclide, per il triangolo ABC:

$$\overline{AH}:\overline{HC}=\overline{HC}:\overline{HB}\qquad\Rightarrow\qquad\overline{AH}=\frac{\overline{HC}\cdot\overline{HC}}{\overline{HB}}=\frac{x}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}x$$

Ho quindi tutti gli elementi per determinare il perimetro e porlo uguale a $\left(5+3\sqrt{3}\right)\,cm$ per determinare la x:

$$2p=\overline{AH}+\overline{HB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA}=\frac{\sqrt{3}}{3}x+x\sqrt{3}+2x+\frac{\sqrt{3}}{3}x+x=5+3\sqrt{3}$$

$$\frac{5\sqrt{3}}{3}x+3x=5+3\sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}x\left(5+3\sqrt{3}\right)=5+3\sqrt{3}\qquad\Rightarrow\qquad x=\sqrt{3}$$

Perciò:

$$\overline{BH}=x\sqrt{3}=3\,cm\quad\overline{CH}=x=\sqrt{3}\,cm\quad\overline{AH}=\frac{x}{\sqrt{3}}=1\,cm$$

$$Area=\frac{(2\cdot\overline{AH}+\overline{HB})\cdot\overline{CH}}{2}=\frac{5\,cm\cdot\sqrt{3}\,cm}{2}=\mathbf{\frac{5\sqrt{3}}{2}cm^2}$$

NB: se abbiamo notato che il perimetro è esattamente ¼ di quello determinato in precedenza, diventa semplice calcolarne i lati, che avranno esattamente misura pari a ¼ dei lati determinati al punto precedente.