1. Risolvi le seguenti equazioni e disequazioni:

A. $sen\ 2x = sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$$2x = x - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$
$$x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$2x = \pi - x + \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$
$$3x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$$
$$x = \frac{5}{12}\pi + \frac{2}{3}k\pi$$

B. $3\cos^2 x + sen\, x = 2 - sen^2(\pi - x)$

$$3\cos^2 x + sen\, x = 2 - sen^2 x \qquad 3(1 - sen^2 x) + senx = 2 - sen^2 x$$

$$2\, sen^2 x - senx - 1 = 0 \qquad sen\, x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \left\langle \begin{array}{l} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$sen\, x = 1 \qquad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$sen\, x = -\frac{1}{2}$$
$$x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \qquad x = -\frac{5}{6}\pi + 2k\pi$$

C. $2\, sen^2 x - \sqrt{3}\, sen\, x \cos\, x - \cos^2 x = \frac{1}{2}$

Equazione riconducibile a omogenea:

$$4\, sen^2 x - 2\sqrt{3}\, sen\, x \cos x - 2\cos^2 x = cos^2 x + sen^2 x$$
$$3\, sen^2 x - 2\sqrt{3}\, sen\, x \cos x - 3\cos^2 x = 0$$

$x = k\pi$ non è soluzione dell'equazione. Possiamo dividere entrambi i membri per $\cos^2 x$:

$$3\, tg^2 x - 2\sqrt{3}\, tg\, x - 3 = 0 \qquad tg\, x_{1,2} = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{12}}{3} = \left\langle \begin{array}{l} \sqrt{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{array} \right.$$

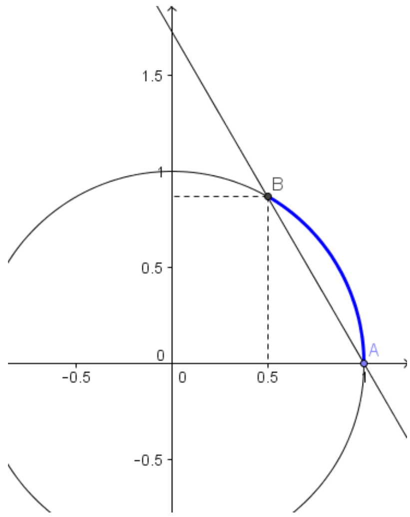
$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi \qquad x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$$

Le due soluzioni possono essere scritte in modo più conciso:

$$x = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}$$

D. $\sqrt{3}\cos x + sen\, x - \sqrt{3} > 0$

Si tratta di una disequazione lineare. Procediamo con una soluzione grafica:



$$\begin{cases} \sqrt{3}X + Y - \sqrt{3} = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} Y = \sqrt{3} - \sqrt{3}X \\ X^2 + 3 + 3X^2 - 6X = 1 \end{cases}$$

$$2X^2 - 3X + 1 = 0 \qquad X_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{4} = \left\langle \begin{matrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \right.$$

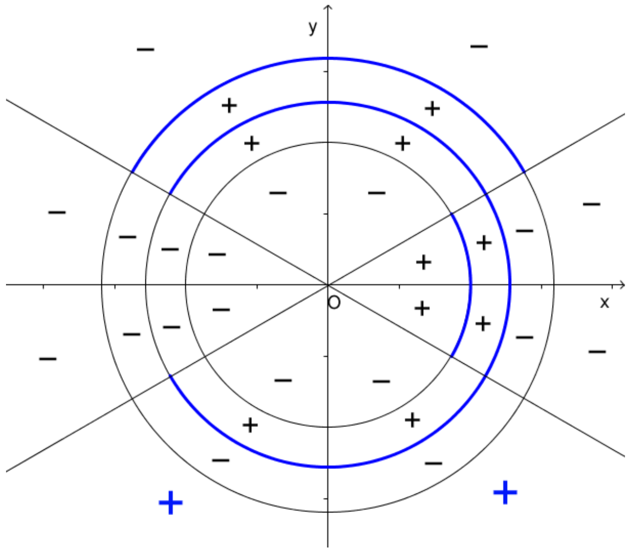
$$\begin{cases} X = 1 \\ Y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} X = \frac{1}{2} \\ Y = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Rappresentando la retta come nel disegno a fianco, possiamo determinare la soluzione (sostituendo l'origine vediamo che essa non appartiene al semipiano positivo richiesto), perciò:

$$\boldsymbol{2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi}$$

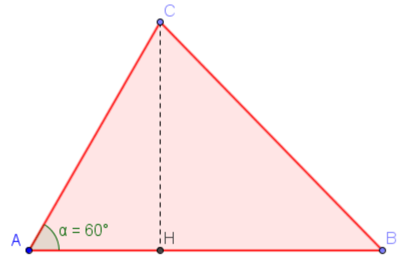
E. $\frac{4\cos^2 x - 3}{2\, sen x - 1} > 0$

$$\frac{\left(2\cos x - \sqrt{3}\right)\left(2\cos x + \sqrt{3}\right)}{2\, sen x - 1} > 0$$



$$\boldsymbol{-\frac{5}{6}\pi + 2k\pi < x < -\frac{\pi}{6} + 2k\pi}$$

2. In un triangolo ABC l'angolo $B\hat{A}C$ è di 60° e il lato AC di 106 cm. Determina l'altezza CH del triangolo relativa al lato AB e il perimetro del triangolo ACH.



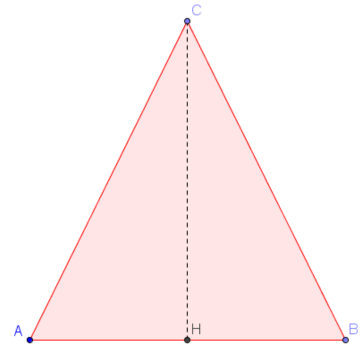
Consideriamo il triangolo ACH, rettangolo in H.
Possiamo applicare i teoremi sui triangoli rettangoli:

$$CH = AC \cdot sen\ 60° = 53\sqrt{3}\ cm$$

$$AH = AC \cdot cos\ 60° = 53\ cm$$

$$2p = \left(106 + 53\sqrt{3} + 53\right)cm = \mathbf{53\left(3 + \sqrt{3}\right)cm}$$

3. L'area di un triangolo isoscele è $144\sqrt{3}\ cm^2$ e la base è lunga $24\sqrt{3}\ cm$. Determina il perimetro del triangolo.



Dall'area e dalla base, possiamo determinare la base. Applicando poi il teorema di Pitagora, possiamo determinare i lati obliqui e quindi il perimetro del triangolo:

$$A = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CH}}{2} \quad \Rightarrow \quad \overline{CH} = \frac{2\ A}{\overline{AB}} = 12\ cm$$

$$\overline{BC} = \sqrt{CH^2 + HB^2} = 24\ cm$$

$$2p = 24\ cm + 24\ cm + 24\sqrt{3}\ cm = \mathbf{24\left(2 + \sqrt{3}\right)cm}$$

4. Calcola il numero di abbinamenti possibili indicati di seguito:
   A. In quanti modi diversi possono sedersi sei persone nei sei posti di uno scompartimento ferroviario?
   B. Forma le disposizioni a tre a tre delle quattro lettere a, b, c, d. Quante sono?

A. Applico la formula della permutazione semplice, considerato che nella prima posizione ho 6 possibilità di scelta, nella seconda 5, nella terza 4 e così via…

$$P_6 = 6! = \mathbf{720}$$

B. Si tratta di una disposizione semplice, visto che ho 3 posizioni a disposizione e 4 possibilità diverse di riempirle:

$$D_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)!} = 4! = \mathbf{24}$$

5. Risolvi l'equazione: $5\binom{x}{3} = \binom{x+2}{3}$

$$5\ \frac{x!}{3!\ (x-3)!} = \frac{(x+2)!}{3!\ (x+2-3)!} \qquad C.A.: \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \qquad x \geq 3$$

$$5\ \frac{x!}{(x-3)!} = \frac{(x+2)(x+1)\ x!}{(x-1)(x-2)(x-3)!} \qquad 5 = \frac{(x+2)(x+1)}{(x-1)(x-2)}$$

$$5(x-1)(x-2) = (x+2)(x+1) \qquad 5\left(x^2 - 3x + 2\right) = x^2 + 3x + 2$$

$$4x^2 - 18x + 8 = 0 \qquad 2x^2 - 9x + 4 = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81-32}}{4} = \left\langle \begin{matrix} 4 \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \right.$$

Per le condizioni di accettabilità, l'unica soluzione è $\mathbf{x = 4}$.

6. Si lanciano due dadi:
   A. Qual è la probabilità che nessuna delle due facce presenti il numero 1?
   B. Qual è la probabilità che almeno una faccia presenti il numero 1?

A.

$$p(\bar{1} \cap \bar{1}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \mathbf{\frac{25}{36}}$$

B. Chiedere che almeno su una faccia si presenti il numero 1 è come chiedere la probabilità contraria rispetto alla precedente, cioè:

$$1 - p(\bar{1} \cap \bar{1}) = 1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \mathbf{\frac{11}{36}}$$

7. I pazienti di un reparto vengono curati con due tipi di medicinali A e B; al 60% dei degenti viene somministrato il medicinale A, ai rimanenti il medicinale B. Su 100 pazienti curati con il medicinale A, 70 risultano guariti, mentre, su 100 pazienti curati con il medicinale B, ne risultano guariti 65. Scelto a caso un paziente guarito, qual è la probabilità che gli sia stato somministrato il medicinale B?

Si tratta di un'applicazione del Teorema di Bayes:

$$p\,(A) = 60\,\% \qquad p\,(B) = 40\,\% \qquad p\,(G|A) = 70\,\% \qquad p\,(G|B) = 65\,\% \qquad p\,(B|G) = ?$$

$$p\,(B|G) = \frac{p\,(B)\,p\,(G|B)}{p\,(A)\,p\,(G|A) + p\,(B)\,p\,(G|B)} = \mathbf{\frac{13}{34}}$$

8. Calcola il valore della seguente espressione: $\frac{3i^{14}-(5i+i^3)(6i^9-5i^5)}{9i^{26}+2i^6}$

$$\frac{3i^{14} - (5i + i^3)(6i^9 - 5i^5)}{9i^{26} + 2i^6} = \frac{-3 - (5i - i)(6i - 5i)}{-9 - 2} = \frac{-3 - 4i\,(i)}{-11} = \frac{-3 + 4}{-11} = \mathbf{-\frac{1}{11}}$$

9. Esprimi in forma trigonometrica ed esponenziale il numero $3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}$.

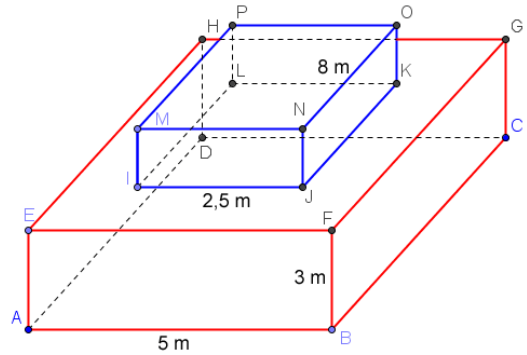
$$z = 3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2} = \sqrt{\left(3\sqrt{2}\right)^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2}\,\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,sen\frac{\pi}{4}\right) = \mathbf{6\,\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,sen\frac{\pi}{4}\right) = 6\,e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

10. Calcola $\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\,sen\frac{3}{4}\pi\right)^4$

Innanzi tutto, scrivo il numero complesso in forma trigonometrica e poi elevo a potenza:

$$\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\,sen\frac{3}{4}\pi\right)^4 = \left(e^{i\frac{3}{4}\pi}\right)^4 = e^{3\pi i} = \cos 3\pi + i\,sen\,3\pi = \mathbf{-1}$$

11. Una scultura moderna è formata da due parallelepipedi rettangoli, uno sovrapposto all'altro. Nel primo l'area di base è 65 m^2, una dimensione di base misura 5 m e l'altezza 3 m, mentre il secondo, sovrapposto al primo, ha le dimensioni di base di 2,5 m e 8 m e l'altezza uguale a 2/7 del perimetro di base. Calcola l'area di tutto il solido.



Se l'area di base del primo è di 65 m^2 e una dimensione misura 5 m, per determinare l'altra devo dividere l'area per la dimensione nota:

$$b_1 = \frac{A_1}{a_1} = 13\ m$$

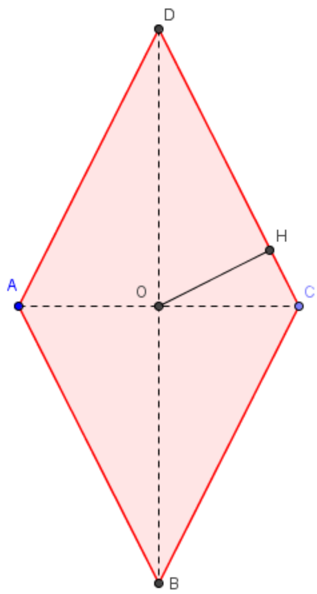
Determino il perimetro di base del secondo parallelepipedo e quindi l'altezza:

$$h_2 = \frac{2}{7}(2p_2) = \frac{2}{7}\ (2{,}5\ m + 8m) \cdot 2 = 6\ m$$

A questo punto, ho tutti i dati per determinare l'area totale del solido, che è data dall'area totale del solido inferiore, sommata all'area laterale del solido superiore:

$$A = 2 \cdot A_1 + 2p_1 \cdot h_1 + 2p_2 \cdot h_2 = 65\ m^2 \cdot 2 + (5\ m + 13\ m) \cdot 2 \cdot 3\ m + (2{,}5\ m + 8\ m) \cdot 2 \cdot 6\ m = \mathbf{364\ m^2}$$

12. Un rombo costituisce la base di una piramide retta. Il perimetro del rombo è 30 cm, la diagonale minore misura 9 cm e l'area totale della piramide è 300 cm^2. Calcola la misura dell'apotema e dell'altezza della piramide.



$$\overline{AC} = 9\ cm \qquad 2p = 30\ cm$$

$$\overline{AD} = \frac{2p}{4} = 7{,}5\ cm$$

Per determinare la diagonale maggiore, applichiamo il teorema di Pitagora:

$$\overline{BO} = \sqrt{AB^2 - AO^2} = 6\ cm \qquad \Rightarrow \qquad \overline{BD} = 12\ cm$$

Se dall'area totale della piramide sottraiamo l'area di base, otteniamo l'area laterale:

$$A_L = 300\ cm^2 - \frac{12\ cm\ \cdot 9\ cm}{2} = 246\ cm^2$$

Possiamo quindi determinare la misura dell'apotema a:

$$A_L = 2p \cdot \frac{a}{2} \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{2A_L}{2p} = \mathbf{16{,}4\ cm}$$

Devo determinare il segmento OH, altezza relativa all'ipotenusa del triangolo rettangolo OCD e, applicando il teorema di Pitagora (l'apotema è l'ipotenusa e OH è uno dei cateti, mentre l'altezza della piramide è l'altro cateto) posso determinare l'altezza della piramide:

$$\frac{\overline{OH}\ \cdot \overline{CD}}{2} = \frac{\overline{DO} \cdot \overline{OC}}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{OH} = \frac{\overline{DO} \cdot \overline{OC}}{\overline{CD}} = 3{,}6\ cm$$

$$H = \sqrt{a^2 - OH^2} = \mathbf{16\ cm}$$