1. Trova quel numero positivo che aggiunto al triplo del suo quadrato uguaglia la differenza tra il quadrato del doppio del suo consecutivo e il numero 82.

$$x + 3x^2 = [2\,(x+1)]^2 - 82$$

$$x + 3x^2 = 4x^2 + 8x + 4 - 82 \qquad\qquad x^2 + 7x - 78 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49+312}}{2} = \frac{-7 \pm 19}{2} = \left\langle \begin{matrix} -13 \\ 6 \end{matrix} \right.$$

Siccome il testo parla di un numero positivo, la soluzione è **x = 6**.

2. Risolvi le seguenti equazioni, disequazioni e sistemi:

A. $\left(x - \sqrt{2}\right)^2 + \sqrt{2}(2x+1) - x - 4 = 0$

$$x^2 - 2x\sqrt{2} + 2 + 2x\sqrt{2} + \sqrt{2} - x - 4 = 0 \qquad\qquad x^2 - x - 2 + \sqrt{2} = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8 - 4\sqrt{2}}}{2} = \frac{1 \pm \left(2\sqrt{2} - 1\right)}{2} = \left\langle \begin{matrix} \boldsymbol{\sqrt{2}} \\ \boldsymbol{1 - \sqrt{2}} \end{matrix} \right.$$

B. $2x^3 + x^2 - 7x - 6 = 0$

Non possiamo che procedere con la regola di Ruffini. Scegliamo i divisori, applicando il teorema di Ruffini:

$P(1) = 2 + 1 - 7 - 6 \neq 0$
$P(-1) = -2 + 1 + 7 - 6 = 0$

	2	1	-7	-6
-1		-2	1	6
	2	-1	-6	0

Una delle soluzioni è quindi **x = – 1**.
Procediamo con l'equazione di secondo grado:

$$2x^2 - x - 6 = 0 \qquad\qquad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{4} = \left\langle \begin{matrix} \mathbf{2} \\ -\boldsymbol{\frac{3}{2}} \end{matrix} \right.$$

C. $8x^6 - 7x^3 - 1 = 0$

Si tratta di un'equazione trinomia, perciò poniamo: $y = x^3$

$$8y^2 - 7y - 1 = 0 \qquad\qquad y_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49+32}}{16} = \left\langle \begin{matrix} 1 \\ -\frac{1}{8} \end{matrix} \right.$$

Restano quindi da risolvere due equazioni binomie ora:

$$x^3 = 1 \qquad x = \mathbf{1} \qquad\qquad x^3 = -\frac{1}{8} \qquad x = -\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

D. $\frac{5+3x^2}{6} > \frac{1}{4}\left(3+\frac{1}{3}+2x^2\right)-\frac{x^2-4}{3}$

$$5+3x^2 > \frac{3}{2}\left(\frac{10}{3}+2x^2\right)-2x^2+8 \qquad 5+3x^2 > 5+3x^2-2x^2+8$$

$$x^2-4>0 \qquad \boldsymbol{x<-2 \ \vee \ x>2}$$

E. $\begin{cases} (3x+7)^2 > (x+5)^2-9 \\ x^2-2x+1>0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 9x^2+42x+49 > x^2+10x+25-9 \\ (x-1)^2>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 8x^2+32x+33>0 \\ x\neq 1 \end{cases}$$

$$8x^2+32x+33=0 \qquad \frac{\Delta}{4}=16^2-33\cdot 8=8\cdot 32-8\cdot 33<0$$

$$\begin{cases} \forall x\in\mathbb{R} \\ x\neq 1 \end{cases} \qquad \boldsymbol{x\neq 1}$$

F. $(x-2)(3x+4)(x^2+5x)\leq 0$

$x(x-2)(3x+4)(x+5)\leq 0$

	-5	-4/3	0	2	
$x\geq 0$	–	–	–	+	+
$x\geq 2$	–	–	–	–	+
$x\geq -\frac{4}{3}$	–	–	+	+	+
$x\geq -5$	–	+	+	+	+
	+	–	+	–	+

$$\boldsymbol{-5\leq x\leq -\frac{4}{3} \ \vee \ 0\leq x\leq 2}$$

G. $\frac{x^3-2x^2-x+2}{x-3}\leq 0$

$$\frac{x^2(x-2)-1(x-2)}{x-3}\leq 0 \qquad \frac{(x-2)(x^2-1)}{x-3}\leq 0 \qquad \frac{(x-2)(x-1)(x+1)}{x-3}\leq 0$$

	– 1	1	2	3	
$x\geq 2$	–	–	–	+	+
$x\geq 1$	–	–	+	+	+
$x\geq -1$	–	+	+	+	+
$x>3$	–	–	–	–	+
	+	–	+	–	+

$$\boldsymbol{-1\leq x\leq 1 \ \vee \ 2\leq x<3}$$

H. $\begin{cases} 2x + y = \frac{9}{2} \\ x\,(x - y) = 3 \end{cases}$

$$\begin{cases} y = \frac{9}{2} - 2x \\ x\left(x - \frac{9}{2} + 2x\right) = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \frac{9}{2} - 2x \\ 3x^2 - \frac{9}{2}x = 3 \end{cases}$$

$$6x^2 - 9x - 6 = 0 \qquad 2x^2 - 3x - 2 = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \left\langle \begin{matrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \end{matrix} \right.$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = 2} \\ \boldsymbol{y = \frac{1}{2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{x = -\frac{1}{2}} \\ \boldsymbol{y = \frac{11}{2}} \end{cases}$$

I. $\begin{cases} 3\,(x + y) = 10 \\ 9\,(x^2 + y^2) = 82 \end{cases}$

Si tratta di un sistema simmetrico:

$$\begin{cases} x + y = \frac{10}{3} \\ x^2 + y^2 = \frac{82}{9} \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = \frac{10}{3} \\ (x + y)^2 - 2xy = \frac{82}{9} \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = \frac{10}{3} \\ \frac{100}{9} - 2xy = \frac{82}{9} \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = \frac{10}{3} \\ xy = 1 \end{cases}$$

Consideriamo l'equazione associata:

$$z^2 - \frac{10}{3}z + 1 = 0 \qquad 3z^2 - 10z + 3 = 0 \qquad z_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 9}}{3} = \left\langle \begin{matrix} 3 \\ \frac{1}{3} \end{matrix} \right.$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = 3} \\ \boldsymbol{y = \frac{1}{3}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{x = \frac{1}{3}} \\ \boldsymbol{y = 3} \end{cases}$$

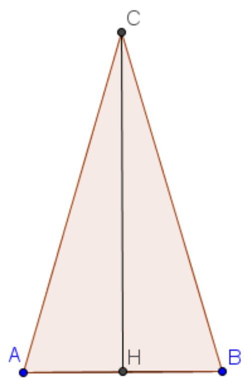
3. Un triangolo isoscele ha il perimetro di 384 m e la base è 14/25 di ciascun lato. Calcola l'ara del triangolo.

Indichiamo con x il lato BC del triangolo isoscele, perciò: $AB = \frac{14}{25}x$.
Il valore indicato per il perimetro ci permette di determinare x:

$$x + x + \frac{14}{25}x = 384 \qquad \frac{64}{25}x = 384 \qquad x = 150$$

Perciò:

$$\overline{AC} = \overline{BC} = 150\,m \qquad \overline{AB} = 84\,m$$



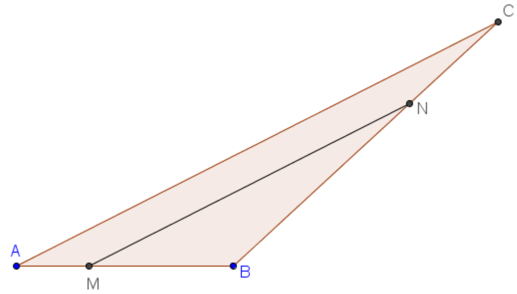
Con il teorema di Pitagora possiamo determinare l'altezza del triangolo, per calcolarne l'area:

$$\overline{CH} = \sqrt{BC^2 - BH^2} = 144\,m$$

Ecco quindi l'area:

$$A = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CH}}{2} = \boldsymbol{6048\,m^2}$$

4. Nel triangolo ABC i perimetro è di 62 cm, il lato AB è 3/5 del lato BC il quale supera di 2 cm i 3/5 del lato AC. Dal punto M di AB, tale che AM sia lungo 4 cm, traccia la corda MN parallela al lato AC. Determina la lunghezza della corda MN.



Indichiamo i lati in questo modo:

$$\overline{AC} = x \qquad \overline{BC} = 2 + \frac{3}{5}x \qquad \overline{AB} = \frac{3}{5}\left(2 + \frac{3}{5}x\right)$$

Utilizziamo il dato del perimetro per determinare il valore di x:

$$x + 2 + \frac{3}{5}x + \frac{3}{5}\left(2 + \frac{3}{5}x\right) = 62$$

$$x + 2 + \frac{3}{5}x + \frac{6}{5} + \frac{9}{25}x = 62$$

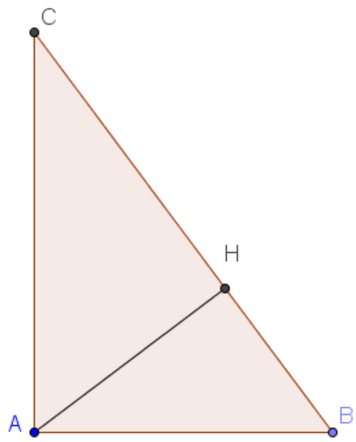
$$\frac{49}{25}x = \frac{294}{5} \qquad x = 294 \cdot \frac{5}{49} = 30$$

$$\overline{AC} = 30\ cm \qquad \overline{BC} = 20\ cm \qquad \overline{AB} = 12\ cm$$

I triangoli MNB e ABC sono simili, in quanto la corda MN è parallela al lato AC, perciò:

$$\overline{MN}:\overline{AC} = \overline{MB}:\overline{AB} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{MN} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{MB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC} \cdot (\overline{AB} - \overline{AM})}{\overline{AB}} = \mathbf{20\ cm}$$

5. In un triangolo rettangolo un cateto è lungo 60 cm e la sua proiezione sull'ipotenusa è 4/3 dell'altezza relativa all'ipotenusa. Trova il perimetro e l'area del triangolo.



$$\overline{AC} = 60\ cm \qquad \overline{AH} = x \qquad \overline{CH} = \frac{4}{3}x$$

Applicando il teorema di Pitagora:

$$AC^2 = AH^2 + CH^2 \qquad 60^2 = x^2 + \frac{16}{9}x^2 \qquad \frac{25}{9}x^2 = 60^2$$

$$\frac{5}{3}x = 60 \qquad x = 60 \cdot \frac{3}{5} = 36$$

$$\overline{AH} = 36\ cm \qquad \overline{CH} = 48\ cm$$

Con il teorema di Euclide possiamo determinare HB:

$$\overline{AH}^2 = \overline{CH} \cdot \overline{HB} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{HB} = \frac{\overline{AH}^2}{\overline{CH}} = 27\ cm$$

Perciò: $\overline{BC} = 75\ cm.$

Determiniamo il cateto AB con il teorema di Pitagora:

$$\overline{AB} = \sqrt{BC^2 - AC^2} = 45\ cm$$

Ora possiamo determinare perimetro e area:

$$2p = 45cm + 60cm + 75\ cm = \mathbf{180\ cm} \qquad A = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{2} = \mathbf{1350\ cm^2}$$