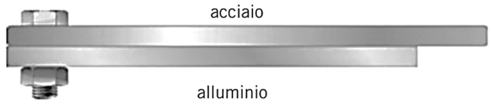
1. Come mostra la figura, due strisce sottili di metallo, alla stessa temperatura, sono bloccate insieme a un estremo. Una striscia è di acciaio, mentre l'altra è di alluminio. La striscia di acciaio è più lunga di quella di alluminio dello 0,10%. Di quanto deve aumentare la temperatura perché le due strisce abbiano la stessa lunghezza?

$$\lambda_{Al} = 23 \cdot 10^{-6}\, K^{-1} \qquad \lambda_{ac} = 12 \cdot 10^{-6}\, K^{-1} \qquad l_{o_{ac}} = \frac{100{,}1}{100} l_{o_{Al}} \qquad l_{ac} = l_{Al} \qquad \Delta T?$$



Sapendo che $l_{ac} = l_{Al}$, per la dilatazione lineare ottengo:

$$l_{o_{ac}} (1 + \lambda_{ac}\, \Delta T) = l_{o_{Al}} (1 + \lambda_{Al}\, \Delta T)$$

Sapendo che $l_{o_{ac}} = \frac{100{,}1}{100} l_{o_{Al}}$:

$$\frac{100{,}1}{100} l_{o_{Al}} (1 + \lambda_{ac}\, \Delta T) = l_{o_{Al}} (1 + \lambda_{Al}\, \Delta T) \quad \Rightarrow \quad 100{,}1\,(1 + \lambda_{ac}\, \Delta T) = 100\,(1 + \lambda_{Al}\, \Delta T)$$

$$100{,}1 + 100{,}1\, \lambda_{ac}\, \Delta T = 100 + 100\, \lambda_{Al}\, \Delta T \quad \Rightarrow \quad \Delta T\,(100\, \lambda_{Al} - 100{,}1\, \lambda_{ac}) = 0{,}1$$

$$\Delta T = \frac{0{,}1}{100\, \lambda_{Al} - 100{,}1\, \lambda_{ac}} = \mathbf{91°C}$$

2. Su 180 g di oro fuso, che si trova alla temperatura di fusione di 1063°C, viene spruzzata acqua a 23°C. L'acqua si trasforma in vapore a 100°C e l'oro solidifica senza cambiare temperatura. Calcola la quantità di acqua spruzzata sull'oro.

$$m_o = 180\, g \qquad T_o = 1063°C \qquad T_a = 23°C \qquad T_{a_2} = 100°C \qquad L_v = 22{,}6 \cdot 10^5\, J/kg \qquad L_f = 6{,}28 \cdot 10^4\, J/kg \qquad m_a?$$

L'oro cede il suo calore all'acqua, portandola a 100°C e poi facendola evaporare, perciò: $Q_1 + Q_2 = Q_3$, dove $Q_1 = m_a c\,(T_{a_2} - T_a)$ è il calore necessario per innalzare la temperatura dell'acqua, $Q_2 = m_a L_v$ è il calore latente di vaporizzazione, cioè il calore necessario per far evaporare l'acqua, e $Q_3 = m_o L_f$ è il calore latente di fusione, ovvero il calore necessario per solidificare l'oro: in altre parole, il calore che fa solidificare l'oro viene ceduto all'acqua per innalzarne la temperatura e vaporizzarla:

$$m_a c\,(T_{a_2} - T_a) + m_a L_v = m_o L_f \quad \Rightarrow \quad m_a = m_o \frac{L_f}{c(T_{a_2} - T_a) + L_v} = \mathbf{4{,}4\, g}$$

3. Uno scaldabagno consuma energia con una potenza di 1,0 kW per riscaldare un volume d'acqua di 50 L dalla temperatura di 13°C alla temperatura di 53°C. Trascurando le dispersioni di energia, calcola il tempo necessario per riscaldare l'acqua.

$$P = 1{,}0\, kW \qquad m = 50\, kg \qquad T_1 = 13°C \qquad T_2 = 53°C \qquad \Delta t?$$

La potenza è definita come il rapporto tra il calore e il tempo, $P = \frac{Q}{\Delta t}$, e il calore in questo caso è quello necessario ad innalzare la temperatura dell'acqua, $Q = mc\,(T_2 - T_1)$:

$$\Delta t = \frac{Q}{P} = \frac{mc\,(T_2 - T_1)}{P} = \mathbf{2h\ 20\ min}$$

4. Un recipiente da 5L può variare il suo volume grazie a una parete ermetica mobile. È riempito con elio (He), alla temperatura di 0°C. Raffreddiamo il gas, mantenendo invariata la pressione, fino a raggiungere una temperatura di – 15°C.
   A. Determina il volume finale del recipiente.
   B. A quale temperatura il volume sarebbe diminuito del 25%?

$$T_1 = 0°C \qquad T_2 = -15°C \qquad p = cost. \qquad V_1 = 5\, L \qquad V_2? \qquad Se\ V_2 = \frac{75}{100} V_1 \qquad T_2?$$

A. L'equazione di stato dei gas perfetti $pV = nRT$ può essere scritta come $\frac{V}{T} = \frac{nR}{p}$ e, visto che la pressione è costante, $\frac{V}{T}$ è costante, quindi:

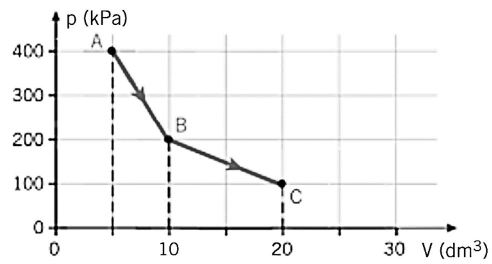
$$\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_1}{T_1} \quad \Rightarrow \quad V_2 = V_1 \frac{T_2}{T_1} = \mathbf{4{,}7\, L}$$

B. Partendo dalle stesse basi e sostituendo $V_2 = \frac{75}{100} V_1$, posso determinare la temperatura richiesta:

$$\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_1}{T_1} \quad \Rightarrow \quad T_2 = T_1 \frac{V_2}{V_1} = T_1 \frac{\frac{75}{100} V_1}{V_1} = \frac{75}{100} T_1 = \mathbf{-68°C}$$

5. Una certa quantità di gas, inizialmente alla temperatura di 20°C, è sottoposta alla trasformazione ABC rappresentata in figura. Calcola il numero di moli di gas e le temperature degli stati B e C.

$$T_A = 293\ K \quad p_A = 400\ kPa \quad V_A = 5\ dm^3 \quad p_B = 200\ kPa \quad V_B = 10\ dm^3$$
$$p_C = 100\ kPa \quad V_C = 20\ dm^3 \quad n? \quad T_B? \quad T_C?$$



Applicando l'equazione di stato dei gas perfetti, posso determinare le incognite richieste:

$$p_A V_A = nRT_A \quad \Rightarrow \quad n = \frac{p_A V_A}{RT_A} = \mathbf{0,82\ mol}$$

Esplicitando $\frac{pV}{T} = nR$ e, dato che il numero di moli è costante e R è una costante:

$$\frac{p_A V_A}{T_A} = \frac{p_B V_B}{T_B} \quad \Rightarrow \quad T_B = \frac{p_B V_B}{p_A V_A} T_A = \mathbf{293\ K}$$

$$\frac{p_A V_A}{T_A} = \frac{p_C V_C}{T_C} \quad \Rightarrow \quad T_C = \frac{p_C V_C}{p_A V_A} T_A = \mathbf{293\ K}$$

6. Supponi che 31,4 J di calore vengano assorbiti da un gas ideale. Il gas si espande alla pressione costante di $1{,}40 \cdot 10^4\ Pa$ mentre il suo volume varia da $3{,}00 \cdot 10^{-4}\ m^3$ a $8{,}00 \cdot 10^{-4}\ m^3$. Il gas non è monoatomico, quindi la relazione $C_p = (5/2)R$ non vale. Determina la variazione nell'energia interna del gas e calcola il suo calore specifico molare C_p.

$$Q = 31{,}4\ J \quad p = 1{,}40 \cdot 10^4\ Pa \quad V_1 = 3{,}00 \cdot 10^{-4}\ m^3 \quad V_2 = 8{,}00 \cdot 10^{-4}\ m^3 \quad \Delta U? \quad C_p?$$

Per il primo principio della termodinamica e, considerato che si tratta di una trasformazione isocora:

$$\Delta U = Q - L = Q - p\Delta V = \mathbf{24,4\ J}$$

Il calore in funzione del calore molare è dato da: $Q = C_p n\, \Delta T$, e, applicando l'equazione di stato del gas perfetto: $pV = nRT \quad \Rightarrow \quad nT = \frac{pV}{R}$ si può determinare il calore specifico molare:

$$C_p = \frac{Q}{nT_2 - nT_1} = \frac{Q}{\frac{pV_2}{R} - \frac{pV_1}{R}} = \frac{QR}{p(V_2 - V_1)} = \mathbf{37,3\ \frac{J}{mol\ K}}$$

7. Un gas perfetto biatomico si comprime a pressione costante. Quale percentuale del calore sottratto al gas serve a far variare la sua energia interna? Quale percentuale per compiere il lavoro necessario alla compressione?

Per il primo principio della termodinamica, $\Delta U = Q - L$, che si può scrivere anche come $Q = \Delta U + L$, sottolineando come il calore sottratto al gas sia pari alla somma di lavoro e variazione di energia interna, tutte quantità negative. Dato che il lavoro, trattandosi di una trasformazione isobara, è dato da $L = p(V_2 - V_1)$ e, per l'equazione di stato del gas perfetto $pV = nRT$, perciò:

$$L = pV_2 - pV_1 = nRT_2 - nRT_1 = nR\, \Delta T$$

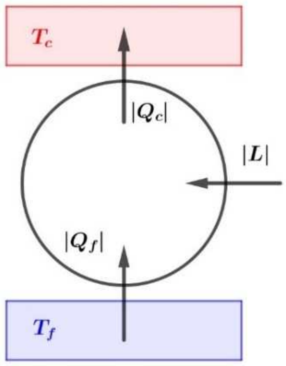
Il calore sottratto al gas è dato da $Q = C_p n\, \Delta T$ e, trattandosi di un gas perfetto biatomico: $C_p = \frac{7}{2} R$, perciò: $Q = C_p n\, \Delta T = \frac{7}{2} nR\, \Delta T$.

L'energia interna di un gas perfetto biatomico è data da: $U = \frac{5}{2} nRT$ e, dato che l'energia interna è una funzione di stato e dipende solo dallo stato iniziale e finale del gas, ottengo: $\Delta U = \frac{5}{2} nR\, \Delta T$.
A questo punto posso calcolare i rapporti richiesti:

$$\frac{\Delta U}{Q} = \frac{\frac{5}{2} nR\, \Delta T}{\frac{7}{2} nR\, \Delta T} = \frac{5}{7} = \mathbf{71\%} \qquad \frac{L}{Q} = \frac{nR\, \Delta T}{\frac{7}{2} nR\, \Delta T} = \frac{2}{7} = \mathbf{29\%}$$

8. Due macchine di Carnot, A e B, che funzionano come condizionatori, rimuovono calore da stanze diverse. La temperatura esterna è la stessa per entrambe le stanze: 309,0 K. La stanza del condizionatore A è tenuta alla temperatura di 294,0 K, mentre la stanza del condizionatore B è tenuta a 301,0 K. Il calore rimosso da entrambe le stanze è 4330 J. Trova quanto vale il lavoro svolto da entrambi i condizionatori e la quantità di calore espulsa all'esterno.

$$|Q_f| = 4330\,J \qquad T_{f_A} = 294{,}0\,K \qquad T_{f_B} = 301{,}0\,K \qquad T_c = 309{,}0\,K \qquad |L_A|? \qquad |L_B|? \qquad |Q_{c_A}|? \qquad |Q_{c_B}|?$$



Lo schema del condizionatore è quello riportato a lato. Il lavoro è dato dalla differenza tra i calori coinvolti e, trattandosi di macchine di Carnot, vale la relazione: $\frac{|Q_c|}{|Q_f|} = \frac{T_c}{T_f}$. Perciò:

$$|L| = |Q_c| - |Q_f| = |Q_f|\left(\frac{|Q_c|}{|Q_f|} - 1\right) = |Q_f|\left(\frac{T_c}{T_f} - 1\right)$$

Posso, quindi, determinare i lavori richiesti:

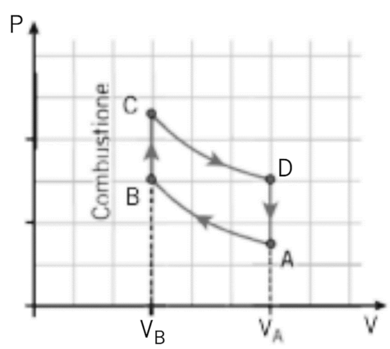
$$|L_A| = |Q_f|\left(\frac{T_c}{T_{f_A}} - 1\right) = \mathbf{220{,}0\,J} \qquad |L_B| = |Q_f|\left(\frac{T_c}{T_{f_B}} - 1\right) = \mathbf{120{,}0\,J}$$

Avendo determinato il lavoro, diventa facile, usando la relazione tra il lavoro e i calori, determinare i calori richiesti:

$$|Q_{c_A}| = |Q_f| + |L_A| = \mathbf{4550\,J} \qquad |Q_{c_B}| = |Q_f| + |L_B| = \mathbf{4450\,J}$$

9. Il ciclo di Otto descrive le trasformazioni termodinamiche dei motori a combustione interna. Il ciclo di Otto di un gas perfetto monoatomico è schematizzato nel grafico. Il tratto AB è una compressione adiabatica fino al volume in cui è fatta esplodere la miscela. Il tratto BC è una trasformazione isocora. Il tratto CD è un'espansione adiabatica. Infine, il gas ritorna alla condizione iniziale mediante una trasformazione isocora DA. Conosciamo il rapporto di compressione $V_A/V_B = 2$ e $\gamma = 1{,}5$. Calcola il rendimento del motore.

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{V_D}{V_C} = 2 \qquad \gamma = 1{,}5 \qquad \eta?$$



Posso determinare le relazioni tra le temperature dei vari stati, usando le relazioni tra le grandezze di una trasformazione adiabatica, in particolare quella tra temperatura e volume, considerando le trasformazioni AB e CD:

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} \quad \Rightarrow \quad T_B = T_A\left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma-1} = T_A\sqrt{2}$$

$$T_C V_C^{\gamma-1} = T_D V_D^{\gamma-1} \quad \Rightarrow \quad T_D = T_C\left(\frac{V_C}{V_D}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_C}{\sqrt{2}}$$

Nel passaggio da B a C avviene la combustione e, quindi, c'è l'immissione di calore Q_c. Nel passaggio da D ad A, trasformazione isocora, si ha una diminuzione della pressione e della temperatura, con fuoriuscita di calore Q_f. Trattandosi, in entrambi i casi, di trasformazioni isocore e ricordando che $Q = nC_V\,\Delta T$:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_f|}{|Q_c|} = 1 - \frac{|nC_V\,(T_A - T_D)|}{|nC_V(T_C - T_B)|} = 1 - \frac{\left|T_A - \frac{T_C}{\sqrt{2}}\right|}{|T_C - T_A\sqrt{2}|} = 1 - \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}|T_A\sqrt{2} - T_C|}{|T_C - T_A\sqrt{2}|} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{|T_C - T_A\sqrt{2}|}{|T_C - T_A\sqrt{2}|} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = \mathbf{0{,}29}$$

10. Supponi che un meteorite sia catturato gravitazionalmente dalla Terra quando è in quiete ai margini del Sistema Solare. In queste ipotesi, la sua energia iniziale totale è praticamente nulla. Calcola la velocità con cui arriva sulla superficie terrestre.

Applicando il principio di conservazione dell'energia e considerando i margini del Sistema Solare come a distanza infinita dalla Terra e con il meteorite in quiete, la somma di energia potenziale e energia cinetica non può che essere nulla, perciò:

$$-G\frac{mM_T}{R_T}+\frac{1}{2}mv^2=0 \quad \Rightarrow \quad v=\sqrt{2\frac{GM_T}{R_T}}=\mathbf{11,2\ km/s}$$

11. La massa di un robot è 5450 kg. Quando si trova sul pianeta A il robot pesa 3620 N in più rispetto a quando si trova sul pianeta B. Entrambi i pianeti hanno un raggio di $1{,}33\cdot 10^7\ m$. Qual è la differenza $M_A - M_B$ tra le masse dei due pianeti?

$$m=5450\ kg \qquad P_A=3620\ N+P_B \qquad r_A=r_B=r=1{,}33\cdot 10^7\ m \qquad M_A-M_B?$$

Posso esprimere il peso come indicato dalla legge di gravitazione universale $P=G\frac{mM}{r^2}$ e da questa determinare la differenza tra le masse:

$$P_A-P_B=G\left(\frac{mM_A}{r_A^2}-\frac{mM_B}{r_B^2}\right)=G\frac{m}{r^2}(M_A-M_B)$$

Ricordando che, dai dati, $P_A=3620\ N+P_B \quad \Rightarrow \quad P_A-P_B=3620\ N$:

$$M_A-M_B=(P_A-P_B)\frac{r^2}{Gm}=\mathbf{1,76\cdot 10^{24}\ kg}$$

12. Un corpo di massa m ha un peso P_A sul pianeta A e un peso P_B sul pianeta B. La massa di A è il 32% della massa di B e l'accelerazione di gravità sulla superficie di A è il 50% di quella su B. Calcola il rapporto percentuale fra i raggi dei pianeti.

$$M_A=\frac{32}{100}M_B \qquad g_A=\frac{1}{2}g_B \qquad r_A/r_B?$$

Posso esprimere il peso come indicato dalla legge di gravitazione universale $P=G\frac{mM}{r^2}$ e sapendo che $P_A=\frac{1}{2}P_B$ dato il rapporto tra le accelerazioni di gravità:

$$G\frac{mM_A}{r_A^2}=\frac{1}{2}G\frac{mM_B}{r_B^2} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{r_A}{r_B}\right)^2=2\frac{M_A}{M_B} \quad \Rightarrow \quad \frac{r_A}{r_B}=\sqrt{2\frac{M_A}{M_B}}=\sqrt{2\frac{\frac{32}{100}M_B}{M_B}}=\sqrt{\frac{64}{100}}=\frac{8}{10}=\mathbf{80\%}$$