Determina gli eventuali punti di massimo o di minimo delle seguenti funzioni

1. $f\ (x) = x e^{3x+2}$

Per determinare massimi e minimi della funzione, devo calcolarne innanzi tutto la derivata prima:

$$f\,'(x) = e^{3x+2} + 3x e^{3x+2}$$

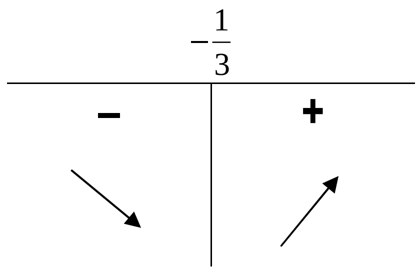
E porla maggiore di zero:

$$e^{3x+2} + 3x e^{3x+2} \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad e^{3x+2}\ (1+3x) \geq 0$$

Si tratta del prodotto di due fattori, di cui uno – e^{3x+2} – è sicuramente positivo. Perciò studio il segno del secondo fattore:

$$1+3x \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad x \geq -\frac{1}{3}$$

Facendo lo schema:



Perciò $-\frac{1}{3}$ è l'ascissa del punto di minimo.

Per determinarne l'ordinata, non mi resta da fare che sostituire l'ascissa nell'espressione della funzione:

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3} e^{3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+2} = -\frac{1}{3}\, e^{-1+2} = -\frac{e}{3}$$

In altre parole, il punto di minimo è: $\underline{\underline{\left(-\frac{1}{3}; -\frac{e}{3}\right)}}$

2. $f\ (x) = 5x^2 e^{-2x} + 3$

Per determinare massimi e minimi della funzione, devo calcolarne innanzi tutto la derivata prima:

$$f\,'(x) = 10 x e^{-2x} - 10x^2 e^{-2x} = 10\ x\ e^{-2x}\ (1-x)$$

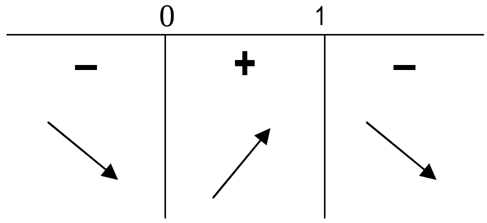
E porla maggiore di zero:

$$10\ x\ e^{-2x}\ (1-x) \geq 0$$

Si tratta del prodotto di più fattori, di cui uno – e^{-2x} – è sicuramente positivo. Perciò studio il segno degli altri fattori:

$$10x\ (1-x) \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad 0 \leq x \leq 1$$

Facendo lo schema:



Perciò 0 è l'ascissa del punto di minimo e 1 è l'ascissa del punto di massimo.

Per determinarne le ordinate, non mi resta da fare che sostituire le ascisse nell'espressione della funzione:

$$f\,(0) = 5 \cdot 0^2 e^{-2 \cdot 0} + 3 = 3 \qquad\qquad f\,(1) = 5 \cdot 1^2 e^{-2 \cdot 1} + 3 = \frac{5}{e^2} + 3$$

In altre parole, il punto di minimo è: $\underline{\underline{(0;\, 3)}}$ e il punto di massimo è: $\underline{\underline{\left(1;\, \dfrac{5}{e^2} + 3\right)}}$

3. $f\,(x) = e^{x^2 - 3x + 2} + 4$

Per determinare massimi e minimi della funzione, devo calcolarne innanzi tutto la derivata prima:

$$f\,'\,(x) = (2x - 3)\, e^{x^2 - 3x + 2}$$

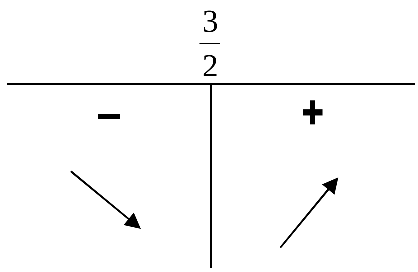
E porla maggiore di zero:

$$(2x - 3)\, e^{x^2 - 3x + 2} \geq 0$$

Si tratta del prodotto di due fattori, di cui uno – $e^{x^2 - 3x + 2}$ – è sicuramente positivo. Perciò studio il segno del secondo fattore:

$$2x - 3 \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad x \geq \frac{3}{2}$$

Facendo lo schema:



Perciò $\dfrac{3}{2}$ è l'ascissa del punto di minimo.

Per determinarne l'ordinata, non mi resta da fare che sostituire l'ascissa nell'espressione della funzione:

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = e^{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} + 2} + 4 = e^{\frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 2} + 4 = e^{\frac{9 - 18 + 8}{4}} + 4 = e^{-\frac{1}{4}} + 4 = \frac{1}{\sqrt[4]{e}} + 4$$

In altre parole, il punto di minimo è: $\underline{\underline{\left(\dfrac{3}{2};\, \dfrac{1}{\sqrt[4]{e}} + 4\right)}}$

4. $f\,(x) = x e^{-x^2}$

Per determinare massimi e minimi della funzione, devo calcolarne innanzi tutto la derivata prima:

$$f'(x) = e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2} = e^{-x^2}\,(1 - 2x^2)$$

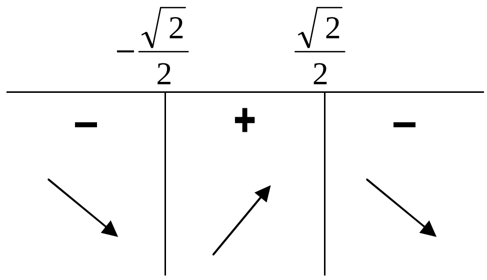
E porla maggiore di zero:

$$e^{-x^2}\,(1 - 2x^2) \geq 0$$

Si tratta del prodotto di due fattori, di cui uno – e^{-x^2} – è sicuramente positivo. Perciò studio il segno del secondo fattore:

$$1 - 2x^2 \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Facendo lo schema:



Perciò $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ è l'ascissa del punto di minimo e $\frac{\sqrt{2}}{2}$ è l'ascissa del punto di massimo.

Per determinarne le ordinate, non mi resta da fare che sostituire le ascisse nell'espressione della funzione:

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,e^{-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{e}}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{e}}$$

In altre parole, il punto di minimo è: $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{e}}\right)$

e il punto di massimo è: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{e}}\right)$