ESERCIZI SVOLTI SULLE FUNZIONI CONTINUE

1. Studia i punti singolari delle seguenti funzioni:

$$f(x)=\frac{5-x}{x^2-5x}$$

Si tratta di una funzione algebrica razionale fratta il cui dominio è: $D_f=]-\infty;0[\cup]0;5[\cup]5;+\infty[$

Studio la discontinuità dei punti x = 0 e x = 5:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{5-x}{x^2-5x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-(x-5)}{x(x-5)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{x}=-\infty$$

$x=0$ *è un punto di discontinuità di 2^ specie*

$$\lim_{x\to 5^\pm}\frac{5-x}{x^2-5x}=\lim_{x\to 5^\pm}\frac{-(x-5)}{x(x-5)}=\lim_{x\to 5^\pm}\frac{-1}{x}=-\frac{1}{5}$$

$x=5$ *è un punto di discontinuità di 3^ specie*

$$f(x)=\frac{x-1}{|x-1|}$$

Si tratta di una funzione algebrica razionale fratta il cui dominio è: $D_f=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

Studio la discontinuità del punto x = 1:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{|x-1|}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x-1}=1 \qquad \lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{|x-1|}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{-(x-1)}=-1$$

$x=1$ *è un punto di discontinuità di 1^ specie*

$$f(x)=\begin{cases}x+3 & se\ x\geq 1\\ -2 & se\ x<1\end{cases}$$

Verifico se la funzione è continua nel punto 1:

$$\lim_{x\to 1^+}(x+3)=4 \qquad \lim_{x\to 1^-}(-2)=-2$$

$x=1$ *è un punto di discontinuità di 1^ specie*

$$f(x)=\frac{x+3}{|x-1|}$$

Si tratta di una funzione algebrica razionale fratta il cui dominio è: $D_f=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

Studio la discontinuità del punto x = 1:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x+3}{|x-1|}=+\infty$$

$x=1$ *è un punto di discontinuità di 2^ specie*

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

Si tratta di una funzione trascendente il cui dominio è: $D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

Studio la discontinuità del punto x = 0:

$\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$ $\qquad \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$ $\qquad x = 0$ *è un punto di discontinuità di* $2^\wedge$ *specie*

2. Verifica se la seguente funzione è continua nel suo dominio:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+6}{x-2} & se\ x \leq 1 \\ \sqrt{x^2 - 1} & se\ 1 < x \leq 2 \\ \dfrac{\sqrt{3}}{3-x} & se\ 2 < x < 3 \\ 7 & se\ x \geq 3 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 1^-} \dfrac{x+6}{x-2} = -7$ $\qquad \lim_{x \to 1^+} \sqrt{x^2 - 1} = 0$

$x = 1$ *è un punto di discontinuità di* $1^\wedge$ *specie*

$\lim_{x \to 2^-} \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{3}$ $\qquad \lim_{x \to 2^+} \dfrac{\sqrt{3}}{3-x} = \sqrt{3}$ $\qquad$ *continua*

$\lim_{x \to 3^-} \dfrac{\sqrt{3}}{3-x} = +\infty$ $\qquad x = 3$ *è un punto di discontinuità di* $2^\wedge$ *specie*

3. Controlla se le seguenti funzioni verificano il teorema di Weierstrass nell'intervallo a fianco indicato:

- $f(x) = \dfrac{x^4}{5 - x^2}$ $\qquad I = [-3; 0]$

  $D_f =]-\infty; -\sqrt{5}[\cup]-\sqrt{5}; \sqrt{5}[\cup]\sqrt{5}; +\infty[$

  La funzione non è continua nell'intervallo indicato, perciò non si può applicare il teorema di Weierstrass

- $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ $\qquad I = [2; 4]$

  $D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

  La funzione è continua nell'intervallo indicato, perciò è dotata di massimo e minimo

- $f(x) = \ln \dfrac{x^2 - 1}{5x}$ $\qquad I = \left[-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{6}\right]$

  $D_f =]-1; 0[\cup]1; +\infty[$

  La funzione è continua nell'intervallo indicato, perciò è dotata di massimo e minimo

4. Controlla se le seguenti funzioni verificano le ipotesi del teorema di esistenza degli zeri nell'intervallo a fianco indicato:

- $f(x) = \dfrac{x^4}{5 - x^2}$ $\qquad I = [-2; 1]$

$D_f =]-\infty; -\sqrt{5}[\cup]-\sqrt{5}; \sqrt{5}[\cup]\sqrt{5}; +\infty[$

La funzione è continua nell'intervallo indicato

$$f(-2) = \frac{(-2)^4}{5 - (-2)^2} = \frac{16}{5 - 4} = 16 \qquad f(0) = \frac{(1)^4}{5 - (1)^2} = \frac{1}{5 - 1} = \frac{1}{4}$$

Dato che la funzione non assume nei due estremi dell'intervallo valori di segno opposto, non si può applicare il teorema di esistenza degli zeri, ovvero non è detto che la funzione intersechi l'asse x.

- $f(x) = \dfrac{x^4}{5 - x^2}$ $\qquad I = [-2; 1]$

$D_f =]-\infty; -\sqrt{5}[\cup]-\sqrt{5}; \sqrt{5}[\cup]\sqrt{5}; +\infty[$

La funzione è continua nell'intervallo indicato

$$f(-2) = \frac{(-2)^4}{5 - (-2)^2} = \frac{16}{5 - 4} = 16 \qquad f(0) = \frac{(1)^4}{5 - (1)^2} = \frac{1}{5 - 1} = \frac{1}{4}$$

Dato che la funzione non assume nei due estremi dell'intervallo valori di segno opposto, non si può applicare il teorema di esistenza degli zeri, ovvero non è detto che la funzione intersechi l'asse x.

- $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ $\qquad I = [-2; 1]$

$D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

La funzione non è continua nell'intervallo indicato, perciò non si può applicare il teorema di esistenza degli zeri.

- $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{2x - 4}$ $\qquad I = [3; 4]$

$D_f =]-\infty; -1] \cup [1; 2[\cup]2; +\infty[$

La funzione è continua nell'intervallo indicato

$$f(3) = \frac{\sqrt{3^2 - 1}}{2 \cdot 3 - 4} = \frac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2} \qquad f(4) = \frac{\sqrt{4^2 - 1}}{2 \cdot 4 - 4} = \frac{\sqrt{15}}{3}$$

Dato che la funzione non assume nei due estremi dell'intervallo valori di segno opposto, non si può applicare il teorema di esistenza degli zeri, ovvero non è detto che la funzione intersechi l'asse x.

- $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$ $\qquad I = \left[-2; -\dfrac{1}{2}\right]$

$$D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$$

La funzione è continua nell'intervallo indicato

$$f(-2) = (-2)^2 + \frac{1}{-2} = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \qquad f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} - 2 = -\frac{7}{4}$$

Dato che la funzione assume nei due estremi dell'intervallo valori di segno opposto, si può applicare il teorema di esistenza degli zeri, ovvero la funzione interseca l'asse x.

5. Stabilisci se le seguenti equazioni hanno soluzioni interne agli intervalli indicati:

- $x^3 - 5x + 3 = 0$ $\qquad I = \left[-2; -\frac{1}{2}\right]$

La funzione è continua nell'intervallo, verifico se la funzione assume nei due estremi dell'intervallo valori di segno opposto:

$$f(-2) = (-2)^3 - 5(-2) + 3 = -8 + 10 + 3 > 0$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 5\left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = -\frac{1}{8} + \frac{5}{2} + 3 > 0$$

L'equazione non ha soluzioni

- $x^4 - 3x + 7 = 0$ $\qquad I = [-2; 2]$

La funzione è continua nell'intervallo, verifico se la funzione assume nei due estremi dell'intervallo valori di segno opposto:

$$f(-2) = (-2)^4 - 3(-2) + 7 = 16 + 6 + 7 > 0$$

$$f(2) = (2)^4 - 3(2) + 7 = 16 - 6 + 7 > 0$$

L'equazione non ha soluzioni

- $x^3 - e^x = 0$ $\qquad I = [0; 1]$

La funzione è continua nell'intervallo, verifico se la funzione assume nei due estremi dell'intervallo valori di segno opposto:

$$f(0) = (0)^3 - e^0 = -1 < 0$$

$$f(1) = (1)^3 - e^1 < 0$$

L'equazione non ha soluzioni

- $-2 - x^2 + e^{\frac{1}{x}} = 0$ $\qquad I = \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

La funzione è continua nell'intervallo, verifico se la funzione assume nei due estremi dell'intervallo valori di segno opposto:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + e^2 > 0$$

$$f(1) = -2 - 1^2 + e < 0$$

L'equazione ha soluzioni