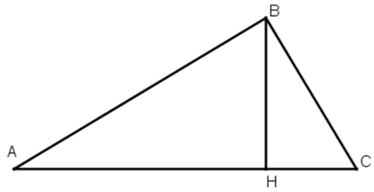
1. Scegli uno dei seguenti problemi:

A. In un triangolo rettangolo la somma fra l'ipotenusa e l'altezza a essa relativa è 28 cm e la differenza delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa è 12 cm. Determina i cateti.



La somma tra l'ipotenusa e l'altezza a essa relativa è 28 cm:

$$\overline{BH}+\overline{AC}=28\ cm$$

La differenza delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa è 12 cm:

$$\overline{AH}-\overline{HC}=12\ cm$$

Indichiamo con l'incognita x la proiezione $\overline{AH}$ del cateto $\overline{AB}$ sull'ipotenusa:

$$\overline{HC}=x-12 \qquad \overline{BH}=28-\overline{AC}=28-(\overline{AH}+\overline{HC})=28-x-x+12=40-2x$$

Per il secondo teorema di Euclide: $\overline{BH}^2=\overline{AH}\cdot\overline{HC}$

$$(40-2x)^2=x\,(x-12) \qquad 1600-160\,x+4x^2=x^2-12\,x$$

$$3x^2-148\,x+1600=0 \qquad x_{1,2}=\frac{74\pm\sqrt{74^2-4800}}{3}=\frac{74\pm 26}{3}=\left\langle\begin{array}{c}\frac{100}{3}\\ 16\end{array}\right.$$

$$\overline{AH}=\frac{100}{3}cm \qquad \overline{BH}=\left(40-\frac{200}{3}\right)\ cm<0 \qquad non\ accettabile$$

$$\overline{AH}=16\ cm \qquad \overline{BH}=8\ cm \qquad \overline{HC}=\frac{\overline{BH}^2}{\overline{AH}}=4\ cm$$

Applicando il teorema di Pitagora prima al triangolo AHB e poi al triangolo HCB, determino i due cateti:

$$\overline{AB}=\sqrt{\overline{AH}^2+\overline{HB}^2}=\mathbf{8\sqrt{5}\ cm} \qquad \overline{AC}=\sqrt{\overline{HC}^2+\overline{HB}^2}=\mathbf{4\sqrt{5}\ cm}$$

B. In un trapezio rettangolo la differenza tra le basi è 3 cm e il lato obliquo è congruente alla base minore. Determina l'area, sapendo che il perimetro è 22 cm.

Indico la base minore e il lato obliquo con x, perciò la base maggiore è data da $3\ cm+x$. Applico il teorema di Pitagora per determinare la lunghezza dell'altezza, considerando il triangolo composto dal lato obliquo, dalla differenza tra le basi e dall'altezza:

$$h=\sqrt{x^2-9}$$

Ora posso usare il perimetro per determinare la lunghezza della base minore:

$$3x+3+\sqrt{x^2-9}=22 \qquad \sqrt{x^2-9}=19-3x \qquad x^2-9=361+9x^2-114\,x$$

$$4x^2-57\,x+185=0 \qquad x_{1,2}=\frac{57\pm\sqrt{57^2-740\cdot 4}}{8}=\frac{57\pm 17}{8}=\left\langle\begin{array}{c}\left[\frac{37}{4}\right]\\ 5\end{array}\right.$$

Nel trapezio, la base minore è di 5 cm, la maggiore di 8 cm e l'altezza è 4 cm. Perciò l'area è:

$$A=\frac{(5\ cm+8\ cm)\cdot 4\ cm}{2}=\mathbf{26\ cm^2}$$

2. Scegli uno dei seguenti problemi:

A. In una circonferenza di centro O e raggio r determina la distanza OH di una corda PQ dal centro, sapendo che

$$\overline{PQ}+\frac{3}{2}\overline{OH}=\frac{5}{2}r$$

Il punto H divide la corda in due parti congruenti, perché qualsiasi perpendicolare alla corda passante per il centro della circonferenza la divide a metà. Perciò, dopo aver indicato OH con x, essendo:

$$\overline{PQ}=2\cdot\overline{PH}=2\sqrt{r^2-x^2}$$

$$2\sqrt{r^2-x^2}+\frac{3}{2}x=\frac{5}{2}r \qquad 4\sqrt{r^2-x^2}=5r-3x \qquad 16\,r^2-16\,x^2=25\,r^2+9x^2-30\,rx$$

$$25\,x^2-30\,rx+9r^2=0 \qquad (5x-3r)^2=0 \qquad x=\boldsymbol{\frac{3}{5}r}$$

B. Considera un punto P sulla diagonale AC del quadrato ABCD di lato $\overline{AB}=30\ cm$ e indica con H la proiezione di P su AD. Poni $\overline{PH}=x$ e calcola per quale valore di x:

$$\overline{BP}+\sqrt{5}\,\overline{PH}=\frac{2}{3}\sqrt{5}\,\overline{AB}$$

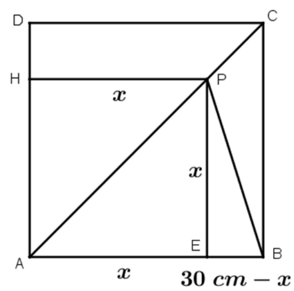
Secondo quanto riportato in figura:

$$\sqrt{x^2+(30-x)^2}+\sqrt{5}\,x=\frac{2}{3}\sqrt{5}\cdot 30$$

$$\sqrt{2x^2-60\,x+900}=\sqrt{5}\,(20-x)$$

$$2x^2-60\,x+900=2000-200\,x+5x^2$$

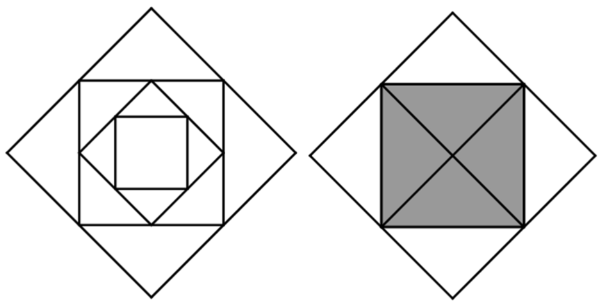
$$3x^2-140\,x+1100=0 \qquad x_{1,2}=\frac{70\pm 10\sqrt{49-33}}{3}=\left\langle \begin{array}{l}\left[\frac{110}{3}\right]\\ \mathbf{10}\end{array}\right.$$



3. Scegli uno dei seguenti due problemi:

A. Per costruire la figura 1, nel quadrato più grande si è inserito un secondo quadrato i cui vertici sono i punti medi dei lati del primo. Si è ripetuta la stessa procedura, inserendo altri due quadrati. Se la superficie del quadrato più grande misura $64\ cm^2$, quanto misura il lato del quadrato più piccolo?

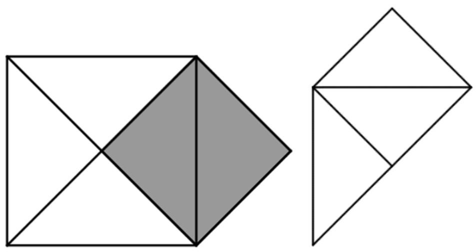
Man mano procediamo, il quadrato più interno ha area pari a metà di quello più esterno, come mostrato nella seconda immagine. Perciò il secondo quadrato ha area $32\ cm^2$, quello più interno $16\ cm^2$ e l'ultimo ha area $8\ cm^2$ e lato, quindi, di $\boldsymbol{2\sqrt{2}\ cm}$.



B. La figura 2 è formata da tre quadrati e due triangoli rettangoli isosceli. Quanto vale la sua area se il lato del quadrato più grande misura 2 cm?

Il primo triangolo, adiacente al quadrato più grande, ha area pari a un quarto del quadrato, come si può intuire dalla figura. Il quadrato successivo, ha area doppia rispetto al triangolo. E si può reiterare il processo fino a concludere la figura:

$$4\ cm^2+1\ cm^2+2\ cm^2+0{,}5\ cm^2+1\ cm^2=\boldsymbol{8,5\ cm^2}$$



4. Qual è la probabilità che tirando un dado tre volte esca almeno un numero pari? E la probabilità che esca esattamente due volte un numero pari?

La probabilità che esca almeno un numero pari è la probabilità contraria dell'evento "non esce mai un numero pari":

$$p = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{7}{8}}$$

La probabilità che esca esattamente due volte un numero pari si può realizzare in tre modi diversi, ovvero il numero dispari può uscire al primo lancio, al secondo o al terzo, perciò:

$$p = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{3}{8}}$$

5. Un'urna A contiene 2 palline bianche, 4 nere e 2 gialle, e un'urna B ne contiene 3 bianche e 5 nere. Estrai a caso una pallina da A e una da B. Calcola la probabilità di estrarre palline (A) dello stesso colore; (B) di colore diverso; (C) entrambe nere.

A: 2B 4N 2G	B: 3B 5N

A. Posso estrarre palline dello stesso colore se escono entrambe bianche o entrambe nere:

$$p(A) = \frac{2}{8} \cdot \frac{3}{8} + \frac{4}{8} \cdot \frac{5}{8} = \boldsymbol{\frac{13}{32}}$$

B. Posso estrarre una bianca da A e una nera da B, una nera da A e una bianca da B, una gialla da A e una qualsiasi da B:

$$p(B) = 1 - p(A) = \boldsymbol{\frac{19}{32}}$$

C. È una parte della probabilità calcolata nel primo punto:

$$p = \frac{4}{8} \cdot \frac{5}{8} = \boldsymbol{\frac{5}{16}}$$

6. In un cassetto ci sono delle penne nere, blu e rosse, e le rosse sono metà di quelle nere. Le penne blu sono 18 e la probabilità di prelevare a caso una penna blu è 0,3. (A) Trova il numero totale delle penne. (B) Calcola la probabilità di estrarre una penna nera o rossa. (C) Estraendone due, senza rimettere la prima nel cassetto, calcola la probabilità che almeno una sia nera.

Siccome la probabilità di trovare le penne blu è data da: $p = \frac{numero\ di\ penne\ blu}{numero\ totale\ di\ penne}$, allora il numero totale è dato da:

$$numero\ totale\ di\ penne = \frac{18}{0{,}3} = \boldsymbol{60}$$

Le penne restanti sono 42 e siccome quelle rosse sono metà di quelle nere, sia x il numero di quelle rosse:

$$x + 2x = 42 \qquad x = 14$$

Le penne rosse sono 14 e quelle nere sono 28. Perciò:

$$p(N \cup R) = \frac{28}{60} + \frac{14}{60} = \frac{42}{60} = \boldsymbol{\frac{7}{10}}$$

Per determinare la probabilità che almeno una sia nera, calcolo la probabilità che una sia nera o che entrambe siano nere:

$$p = 2 \cdot \frac{28}{60} \cdot \frac{32}{59} + \frac{28}{60} \cdot \frac{27}{59} = \boldsymbol{\frac{637}{885}}$$

7. In un supermercato sono stati intervistati 30 clienti. Di questi, 16 hanno detto di acquistare latte fresco parzialmente scremato, 14 latte fresco intero. Fra tutti i precedenti, 9 acquistano entrambi i tipi. 6 clienti acquistano solo latte a lunga conservazione; gli altri non consumano latte. Supponendo che il campione sia rappresentativo, determina la probabilità che un cliente alla cassa abbia nel carrello: (A) latte fresco; (B) latte fresco parzialmente scremato o latte a lunga conservazione; (C) latte; (D) nessun tipo di latte.

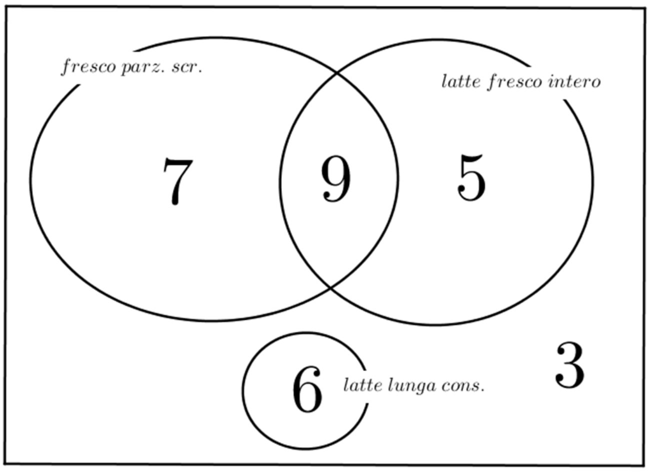
Dopo aver ricostruito la situazione con un diagramma di Venn, indicando con A, B, C e D i quattro eventi:

$$p(A)=\frac{21}{30}=\mathbf{\frac{7}{10}}$$

$$p(B)=\frac{16}{30}+\frac{6}{30}=\mathbf{\frac{11}{15}}$$

$$p(C)=1-\frac{3}{30}=\mathbf{\frac{9}{10}}$$

$$p(D)=\frac{3}{30}=\mathbf{\frac{1}{10}}$$



8. La diagonale del rettangolo di figura 3 è divisa in tre parti uguali, di 10 cm, da due sue perpendicolari condotte da due vertici opposti. Quanto vale l'area del rettangolo misterioso?

Considero il triangolo rettangolo ABC in cui BH è l'altezza relativa all'ipotenusa. Per il secondo teorema di Euclide:

$$\overline{BH}^2=\overline{AH}\cdot\overline{HC} \quad \Rightarrow \quad \overline{BH}=\sqrt{20\,cm\cdot 10\,cm}=10\sqrt{2}\,cm$$

Perciò l'area del rettangolo, essendo doppia di quella del triangolo ABC, è data dal prodotto tra la diagonale e $\overline{HB}$:

$$A=30\,cm\cdot 10\sqrt{2}\,cm=\mathbf{300\sqrt{2}\,cm^2}$$