1. Nell'equazione

$$kx^2 - 2\ (k-1)\,x - k = 0$$

determina k in modo che:

A. le radici siano opposte;
B. una radice sia uguale a 2;
C. la somma delle radici sia uguale al loro prodotto;
D. le radici siano reciproche;
E. una radice sia l'opposta della reciproca dell'altra.

Per verificare fin da ora quali soluzioni saranno accettabili, pongo il discriminante dell'equazione positivo:

$$(k-1)^2 + k^2 \geq 0 \qquad \forall k \in \mathbb{R}$$

A. Se le radici sono opposte, la loro somma è nulla, perciò il coefficiente del termine di primo grado è nullo:

$$2\ (k-1) = 0 \qquad k = \mathbf{1}$$

B. Se una delle radici è uguale a 2, per determinare il valore del parametro, devo sostituire x = 2 nell'equazione:

$$4k - 4\ (k-1) - k = 0 \qquad 4k - 4k + 4 - k = 0 \qquad k = \mathbf{4}$$

C. Perché la somma delle radici sia uguale al loro prodotto:

$$-\frac{b}{a} = \frac{c}{a} \qquad b = -c \qquad -2\ (k-1) = k \qquad 3k = 2 \qquad k = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$$

D. Perché le radici siano reciproche:

$$x_1 = \frac{1}{x_2} \qquad x_1 x_2 = 1 \qquad \frac{c}{a} = 1 \qquad -\frac{k}{k} = 1 \qquad \nexists \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$$

E.

$$x_1 = -\frac{1}{x_2} \qquad x_1 x_2 = -1 \qquad \frac{c}{a} = -1 \qquad -\frac{k}{k} = -1 \qquad \forall \boldsymbol{k} \neq \mathbf{0}$$

2. $\frac{x^4-1}{x^3-1} \geq 0$

$$\frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} \geq 0 \qquad x+1 \geq 0 \quad \wedge \quad x \neq 1$$

Ho indicato in rosso i due binomi che si semplificano, specificando però che devono essere diversi da zero.
Ho indicato in verde la somma di quadrati che è sempre positiva e quindi semplificabile.
Ho indicato in azzurro il falso quadrato, sempre positivo e quindi semplificabile.

$$\boldsymbol{x \geq -1} \quad \wedge \quad \boldsymbol{x \neq 1}$$

3. $\sqrt{x-2} = \sqrt{8-x} - 2$

$$x - 2 = 8 - x + 4 - 4\sqrt{8-x}$$

$$2x - 14 = -4\sqrt{8-x} \qquad 7 - x = 2\sqrt{8-x}$$

$$49 - 14x + x^2 = 32 - 4x$$

$$x^2 - 10x + 17 = 0$$

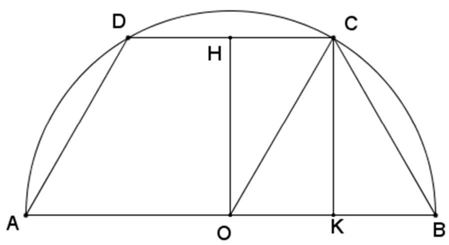
$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-17}}{1} = 5 \pm 2\sqrt{2} = \begin{cases} 5 + 2\sqrt{2} & \textit{non acc.} \\ \mathbf{5 - 2\sqrt{2}} & \textit{acc.} \end{cases}$$

4. $\sqrt{x^2 - x} < 2x$

$$\begin{cases} x^2 - x \geq 0 \\ 2x \geq 0 \\ x^2 - x < 4x^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \leq 0 \ \vee \ x \geq 1 \\ x \geq 0 \\ x < -\frac{1}{3} \ \vee \ x > 0 \end{cases} \qquad \boldsymbol{x \geq 1}$$

5. Un trapezio isoscele inscritto in una semicirconferenza di raggio di misura r ha la base minore che è metà della maggiore. Determina la misura del perimetro e quella dell'area del trapezio.

$$\overline{AB} = 2r \qquad \overline{CD} = r$$



Posso determinare la misura dell'altezza del trapezio tramite il teorema di Pitagora:

$$\overline{OH} = \sqrt{\overline{OC}^2 - \overline{HC}^2} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \frac{r}{2}\sqrt{3}$$

Determino, sempre con il teorema di Pitagora, la misura del lato obliquo:

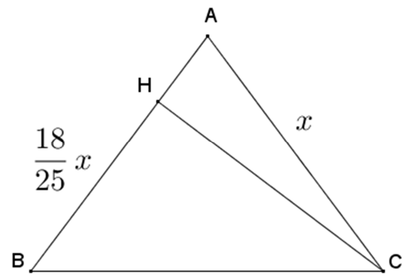
$$\overline{CB} = \sqrt{\overline{CK}^2 + \overline{KB}^2} = \sqrt{\overline{OH}^2 + \overline{CH}^2} = \overline{OC} = r$$

$$2p = \overline{AB} + 2\,\overline{BC} + \overline{CD} = 2r + 2r + r = \mathbf{5r}$$

$$A = \frac{(\overline{AB} + \overline{CD}) \cdot \overline{OH}}{2} = \frac{(2r + r) \cdot \frac{r}{2}\sqrt{3}}{2} = \mathbf{\frac{3}{4} r^2 \sqrt{3}}$$

6. Il perimetro del triangolo isoscele ABC, di base BC, è di 32 cm e la proiezione ortogonale della base BC su uno dei lati congruenti è 18/25 del lato stesso. Determina l'area del triangolo.

$$\overline{AB} = \overline{AC} = x \qquad \overline{BH} = \frac{18}{25}x$$



Posso determinare la misura dell'altezza del triangolo tramite il teorema di Pitagora:

$$\overline{CH} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{HA}^2} = \sqrt{x^2 - \left(\frac{7}{25}x\right)^2} = \frac{24}{25}x$$

Determino, sempre con il teorema di Pitagora, la misura della base $\overline{BC}$:

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{HC}^2 + \overline{HB}^2} = \sqrt{\left(\frac{24}{25}x\right)^2 + \left(\frac{18}{25}x\right)^2} = \frac{30}{25}x = \frac{6}{5}x$$

Ora posso determinare l'incognita a partire dal perimetro del triangolo:

$$x + x + \frac{6}{5}x = 32 \qquad \frac{16}{5}x = 32 \qquad x = 10\ cm$$

A questo punto posso determinare l'area del triangolo:

$$A = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CH}}{2} = \frac{1}{2} \cdot 10\ cm \cdot \frac{24}{25} \cdot 10\ cm = \mathbf{48\ cm^2}$$

7. Un negoziante con 720 euro si riprometteva di acquistare un certo numero di magliette, ma, poiché ogni maglietta è costata 4 euro in più, ne ha dovute comprare sei in meno. Quante magliette ha comprato?.

Indicando con x il prezzo e con y il numero delle magliette, posso impostare un sistema:

$$\begin{cases} xy = 720 \\ (x+4)(y-6) = 720 \end{cases} \qquad y - 6?$$

$$\begin{cases} xy = 720 \\ xy - 6x + 4y - 24 = 720 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 720 \\ 720 - 6x + 4y - 24 = 720 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{720}{y} \\ -3 \cdot \frac{720}{y} + 2y - 12 = 0 \end{cases}$$

$$-3 \cdot \frac{360}{y} + y - 6 = 0 \qquad y^2 - 6y - 1080 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 1080}}{1} = 3 \pm 33 = \left\langle \begin{matrix} -30 & non\ acc. \\ 36 & acc. \end{matrix} \right.$$

Il negoziante ha comprato **30** magliette.