DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO LETTERALI INTERE

1. $x^2-2ax+a+6>0$

Calcoliamo innanzi tutto il discriminante, applicando la formula ridotta:

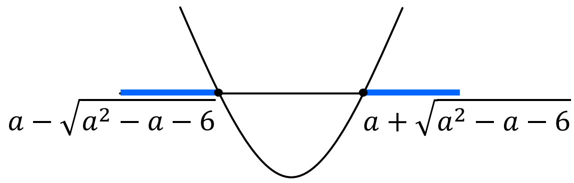
$$\frac{\Delta}{4}=a^2-a-6$$

Ci saranno tre diverse situazioni a seconda del segno del discriminante:

$$a^2-a-6>0 \qquad \Rightarrow \qquad a_{1,2}=\frac{1\pm5}{2}\langle\begin{matrix}-2\\3\end{matrix}$$

$Se\ a<-2\ \vee a>3\ \Rightarrow\ \Delta>0 \qquad x_{1,2}=a\pm\sqrt{a^2-a-6}$

La soluzione maggiore è quella in cui al parametro viene sommato il radicale, perciò:



$x<a-\sqrt{a^2-a-6}\ \ \vee\ \ x>a+\sqrt{a^2-a-6}$

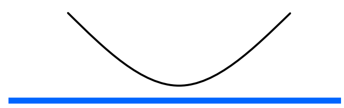
$Se\ a=-2$

La disequazione diventa: $x^2+4x+4>0$, ovvero: $\forall x\in\mathbb{R}-\{-2\}$

$Se\ a=3$

La disequazione diventa: $x^2-6x+9>0$, ovvero: $\forall x\in\mathbb{R}-\{3\}$

$Se\ -2<a<3\ \Rightarrow\ \Delta<0$



$\forall x\in\mathbb{R}$

Riassumendo:

- $Se\ a<-2\ \vee a>3\ \Rightarrow\ x<a-\sqrt{a^2-a-6}\ \ \vee\ \ x>a+\sqrt{a^2-a-6}$
- $Se\ a=-2\ \Rightarrow\ \forall x\in\mathbb{R}-\{-2\}$
- $Se\ a=3\ \Rightarrow\ \forall x\in\mathbb{R}-\{3\}$
- $Se\ -2<a<3\ \Rightarrow\ \forall x\in\mathbb{R}$

2. $2a^2x^2+5ax-3<0$

Calcoliamo innanzi tutto il discriminante:

$$\Delta=25a^2+24a^2=49a^2$$

Il discriminante può essere solo positivo o nullo:

$\underline{Se\ a=0}$
La disequazione diventa: $-3<0$, ovvero: $\underline{\forall x\in\mathbb{R}}$

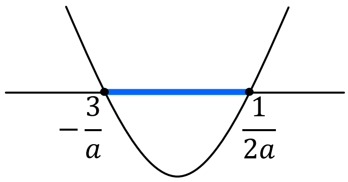
$\underline{Se\ a\neq 0}$

$$x_{1,2}=\frac{-5a\pm 7a}{4a^2}\left\langle \begin{array}{l} -\frac{3}{a} \\ \frac{1}{2a} \end{array}\right.$$

Valutiamo in quale ordine compaiono le due soluzioni:
supponiamo: $-\frac{3}{a}<\frac{1}{2a}\quad\Rightarrow\quad -6a<a\quad\Rightarrow\quad -7a<0\quad\Rightarrow\quad a>0$

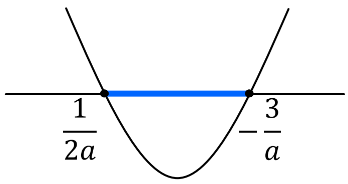
Perciò:

$\underline{Se\ a>0}$, considerato il fatto che il coefficiente del termine di secondo grado è sempre positivo, la parabola che rappresenta la disequazione ha sempre la concavità rivolta verso l'alto:



$$\underline{-\frac{3}{a}<x<\frac{1}{2a}}$$

$\underline{Se\ a<0}$, considerato il fatto che il coefficiente del termine di secondo grado è sempre positivo, la parabola che rappresenta la disequazione ha sempre la concavità rivolta verso l'alto:



$$\underline{\frac{1}{2a}<x<-\frac{3}{a}}$$

Riassumendo:

- $Se\ a=0\ \Rightarrow\ \forall x\in\mathbb{R}$
- $Se\ a>0\ \Rightarrow\ -\frac{3}{a}<x<\frac{1}{2a}$
- $Se\ a<0\ \Rightarrow \frac{1}{2a}<x<-\frac{3}{a}$

3. $ax^2 - 2ax + a + 1 < 0$

Calcoliamo innanzi tutto il discriminante, applicando la formula ridotta:

$$\frac{\Delta}{4} = a^2 - a^2 - a = -a$$

Siccome il discriminante ha segno opposto rispetto al coefficiente del termine di secondo grado, quando il primo è positivo, il secondo è negativo e viceversa:

$Se\ a = 0$

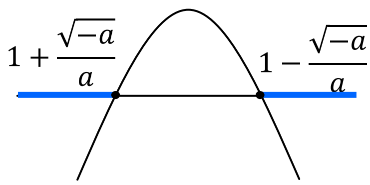
La disequazione diventa: $1 < 0$, ovvero: $\nexists x \in \mathbb{R}$

$Se\ a < 0$

Il discriminante è positivo e il coefficiente del termine di secondo grado è negativo:

$$x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{-a}}{a} = 1 \pm \frac{\sqrt{-a}}{a}$$

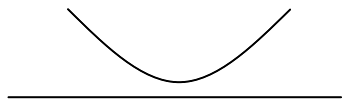
Essendo $a < 0$, la quantità $\frac{\sqrt{-a}}{a} < 0$, perciò: $1 + \frac{\sqrt{-a}}{a} < 1 - \frac{\sqrt{-a}}{a}$:



$$x < 1 + \frac{\sqrt{-a}}{a} \quad \vee \quad x > 1 - \frac{\sqrt{-a}}{a}$$

$Se\ a > 0$

Il discriminante è negativo:



$\nexists x \in \mathbb{R}$

Riassumendo:

- $Se\ a \geq 0 \ \Rightarrow \ \nexists x \in \mathbb{R}$
- $Se\ a < 0 \ \Rightarrow x < 1 + \frac{\sqrt{-a}}{a} \quad \vee \quad x > 1 - \frac{\sqrt{-a}}{a}$

4. $(a+2)x^2 - 4\,(a+1)x + 4a > 0$

Calcoliamo innanzi tutto il discriminante, applicando la formula ridotta:

$$\frac{\Delta}{4} = 4\,(a+1)^2 - 4a\,(a+2) = 4a^2 + 8a + 4 - 4a^2 - 8a = 4$$

Il discriminante non dipende dal parametro ed è sempre positivo $\forall a \in \mathbb{R}$.

Calcoliamo quindi le due soluzioni:

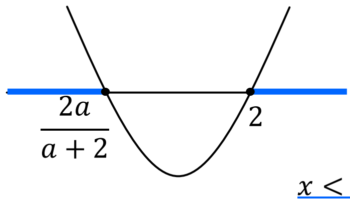
$$x_{1,2} = \frac{2\,(a+1) \pm 2}{a+2} \langle \begin{array}{l} \dfrac{2a+2+2}{a+2} = \dfrac{2\,(a+2)}{a+2} = 2 \\ \dfrac{2a+2-2}{a+2} = \dfrac{2a}{a+2} \end{array}$$

Valutiamo in quale ordine compaiono le due soluzioni:

supponiamo: $\frac{2a}{a+2} < 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{2a-2a-4}{a+2} < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-4}{a+2} < 0 \quad \Rightarrow \quad a+2 > 0 \quad \Rightarrow \quad a > -2$

$\underline{Se\ a > -2}$

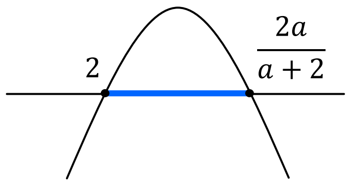
Anche il coefficiente del termine di secondo grado è positivo, perciò la parabola ha concavità rivolta verso l'alto:



$\underline{x < \frac{2a}{a+2} \quad \vee \quad x > 2}$

$\underline{Se\ a < -2}$

Anche il coefficiente del termine di secondo grado è negativo, perciò la parabola ha concavità rivolta verso il basso:



$\underline{2 < x < \frac{2a}{a+2}}$

$\underline{Se\ a = -2}$

La disequazione diventa: $4x - 8 > 0$, ovvero: $\underline{x > 2}$

Riassumendo:

- $Se\ a = -2 \ \Rightarrow \ x > 2$
- $Se\ a > -2 \ \Rightarrow \ x < \frac{2a}{a+2} \quad \vee \quad x > 2$
- $Se\ a < -2 \ \Rightarrow 2 < x < \frac{2a}{a+2}$

5. $(a+3)\,x^2 - 2ax + a - 2 \leq 0$

Calcoliamo innanzi tutto il discriminante, applicando la formula ridotta:

$$\frac{\Delta}{4} = a^2 - (a+3)(a-2) = a^2 - a^2 + 2a - 3a + 6 = 6 - a$$

Il discriminante è positivo nel caso in cui: $a < 6$.

Calcoliamo quindi le due soluzioni:

$$x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{6-a}}{a+3}$$

Valutiamo in quale ordine compaiono le due soluzioni:

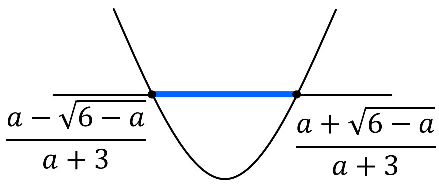
supponiamo: $\frac{a-\sqrt{6-a}}{a+3} < \frac{a+\sqrt{6-a}}{a+3} \Rightarrow \frac{-\sqrt{6-a}}{a+3} < \frac{\sqrt{6-a}}{a+3} \Rightarrow \frac{-1}{a+3} < \frac{1}{a+3} \Rightarrow -\frac{2}{a+3} < 0 \Rightarrow a+3 > 0$

Ovvero: $a > -3$ e, in tal caso, il coefficiente del termine di secondo grado è positivo.

Si presentano, quindi, i seguenti casi, intersecando l'intervallo appena ottenuto con quello del segno del discriminante:

$\underline{Se\ a > -3\ \wedge\ a < 6, ovvero:\ -3 < a < 6}$

Anche il coefficiente del termine di secondo grado è positivo, perciò la parabola ha concavità rivolta verso l'alto:



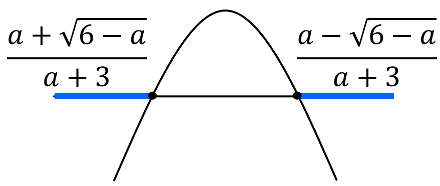
$$\underline{\frac{a-\sqrt{6-a}}{a+3} \leq x \leq \frac{a+\sqrt{6-a}}{a+3}}$$

$\underline{Se\ a = -3}$

La disequazione diventa: $6x - 5 \leq 0$, ovvero: $\underline{x \leq \frac{5}{6}}$

$\underline{Se\ a < -3\ \wedge\ a < 6, ovvero: a < -3}$

Il coefficiente del termine di secondo grado è negativo, perciò la parabola ha concavità rivolta verso il basso:



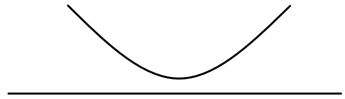
$$\underline{x \leq \frac{a+\sqrt{6-a}}{a+3}\ \vee\ x \geq \frac{a-\sqrt{6-a}}{a+3}}$$

$\underline{Se\ a = 6}$

La disequazione diventa: $9x^2 - 12x + 4 \leq 0$, ovvero: $(3x-2)^2 \leq 0$: $\underline{x = \frac{2}{3}}$

$\underline{Se\ a > 6}$

Il discriminante è negativo:



$\nexists x \in \mathbb{R}$

Riassumendo:

- $Se\ -3 < a < 6 \ \Rightarrow \ \frac{a-\sqrt{6-a}}{a+3} \leq x \leq \frac{a+\sqrt{6-a}}{a+3}$
- $Se\ a = -3 \ \Rightarrow \ x \leq \frac{5}{6}$
- $Se\ a < -3 \ \Rightarrow \ x \leq \frac{a+\sqrt{6-a}}{a+3} \quad \vee \quad x \geq \frac{a-\sqrt{6-a}}{a+3}$
- $Se\ a = 6 \ \Rightarrow \ x = \frac{2}{3}$
- $Se\ a > 6 \ \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$