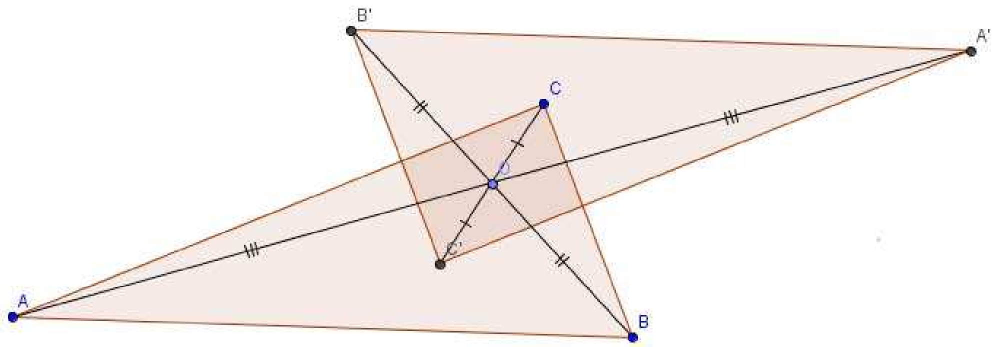
1. Dato il triangolo ABC unisci un punto qualsiasi O del suo piano con i vertici del triangolo e prolunga ciascun segmento, così ottenuto, dalla parte di O, in modo che sia $OA' \cong OA$, $OB' \cong OB$ e $OC' \cong OC$. Dopo aver giustificato l'affermazione "A e A', B e B', C e C' sono punti simmetrici rispetto a O", dimostra che il triangolo A'B'C' è congruente al triangolo ABC.



Hp:
$O \in ABC$
$A, O, A' allineati$
$OA' \cong OA$
$B, O, B' allineati$
$OB' \cong OB$
$C, O, C' allineati$
$OC' \cong OC$

TESI:
$tr\ (ABC) \cong tr(A'B'C')$

Dimostrazione:

"A e A', B e B', C e C' sono punti simmetrici rispetto a O": per definizione due punti sono simmetrici rispetto a un terzo punto quando questo è il punto medio del segmento individuato dai due punti, ovvero A e A' sono simmetrici rispetto a O quando O è il punto medio del segmento AA' e, considerata l'ipotesi $OA' \cong OA$, O è effettivamente il punto medio, perciò A e A' sono simmetrici. Analogamente per i punti B e B', C e C'.

Considero i triangoli AOB e A'OB'. Essi hanno:

$OA' \cong OA$	per ipotesi	
$OB' \cong OB$	per ipotesi	i due triangoli sono congruenti per il primo criterio
$A\hat{O}B \cong A'\hat{O}B'$	perché angoli opposti al vertice	

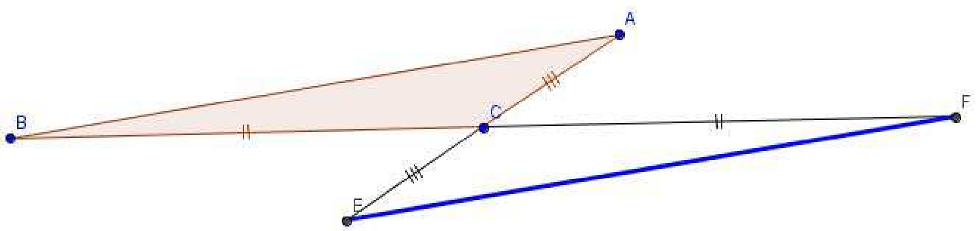
Perciò, $AB \cong A'B'$ perché elementi corrispondenti in triangoli congruenti. (1)

Analogamente, possiamo dimostrare che i triangoli BOC e B'OC' sono congruenti per il primo criterio e, di conseguenza, $BC \cong B'C'$ perché elementi corrispondenti in triangoli congruenti (2) e, sempre allo stesso modo i triangoli AOC e A'OC' sono congruenti per il primo criterio e $AC \cong A'C'$ perché elementi corrispondenti in triangoli congruenti (3).
Di conseguenza, considerando i triangoli ABC e A'B'C', essi hanno:

$AB \cong A'B'$	per precedente dimostrazione (1)	
$BC \cong B'C'$	per precedente dimostrazione (2)	i due triangoli sono congruenti per il terzo criterio
$AC \cong A'C'$	per precedente dimostrazione (3)	

c.v.d.

2. È dato il triangolo ABC. Prolunga AC, dalla parte di C, di un segmento $CE \cong CB$; prolunga poi CB, dalla parte di C, di un segmento $CF \cong CA$. Dimostra che i segmenti FE e AB sono congruenti.



Hp:
A, C, E allineati
$CE \cong CB$
B, C, F allineati
$CF \cong CA$

Tesi:
$FE \cong AB$

Dimostrazione:

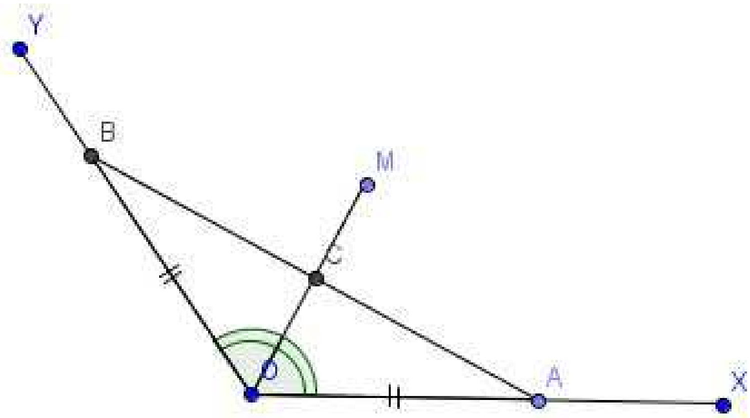
Considero i triangoli ABC e CEF. Essi hanno:

$CE \cong CB$	per ipotesi	
$CF \cong CA$	per ipotesi	i due triangoli sono congruenti per il primo criterio
$A\hat{C}B \cong F\hat{C}E$	perché angoli opposti al vertice	

Perciò, $FE \cong AB$ perché elementi corrispondenti in triangoli congruenti.

c.v.d.

3. Sia OM la bisettrice di un angolo $X\hat{O}Y$. Sui lati OX e OY considera rispettivamente i punti A e B tali che $OA \cong OB$ e sia C il punto di intersezione di OM con AB. Dimostra che $AC \cong BC$.



Hp:

$Y\hat{O}M \cong M\hat{O}X$
$A \in OX$
$B \in OY$
$OA \cong OB$
$AB \cap OM = \{C\}$

TESI:

$AC \cong BC$

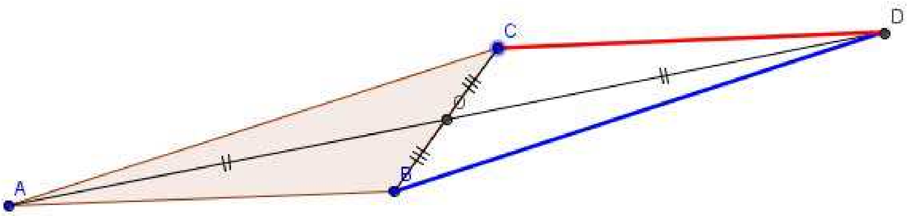
Dimostrazione:
Considero i triangoli AOC e COB. Essi hanno:

$OA \cong OB$	per ipotesi	
OC	in comune	i due triangoli sono congruenti per il primo criterio
$B\hat{O}C \cong C\hat{O}A$	per ipotesi	

Perciò, $AC \cong BC$ perché elementi corrispondenti in triangoli congruenti.

c.v.d.

4. Sia ABC un triangolo qualunque e sia O il punto medio di BC; congiungi A con O e prolunga AO, dalla parte di O, di un segmento $OD \cong OA$. Dimostra che è $BD \cong AC$ e che è $CD \cong AB$.



Hp:

$O \in CB$
$OC \cong OB$
A, O, D allineati
$OD \cong OA$

TESI:

$BD \cong AC$ e $CD \cong AB$

Dimostrazione:
Considero i triangoli AOC e BOD. Essi hanno:

$OC \cong OB$	per ipotesi	
$OD \cong OA$	per ipotesi	i due triangoli sono congruenti per il primo criterio
$C\hat{O}A \cong B\hat{O}D$	perché angoli opposti al vertice	

Perciò, $BD \cong AC$ perché elementi corrispondenti in triangoli congruenti.

Analogamente, considero i triangoli AOB e COD. Essi hanno:

$OC \cong OB$	per ipotesi	
$OD \cong OA$	per ipotesi	i due triangoli sono congruenti per il primo criterio
$C\hat{O}D \cong B\hat{O}A$	perché angoli opposti al vertice	

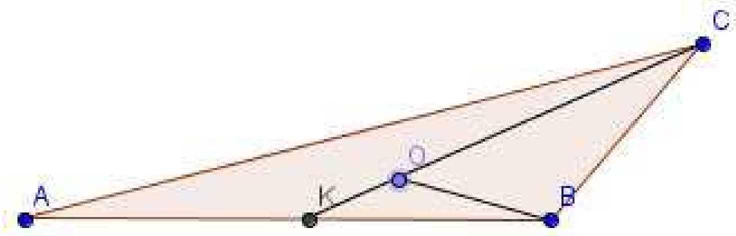
Perciò, $CD \cong AB$ perché elementi corrispondenti in triangoli congruenti.

c.v.d.

5. Nel triangolo ABC congiungi un punto interno O con i vertici B e C; dimostra che $OB + OC < AB + AC$.

Hp:
O interno al triangolo ABC

TESI:
$OB + OC < AB + AC$



Dimostrazione:

Sia K il punto di intersezione del lato AB del triangolo con il prolungamento del segmento CO dalla parte di O.

Nel triangolo ACK vale la disuguaglianza triangolare: $CK < AC + AK$

Nel triangolo BOK vale la disuguaglianza triangolare: $BO < OK + KB$

Sommando le due disequazioni membro a membro otteniamo: $CK + BO < AC + AK + OK + KB$

Ma $CK \cong OC + OK$, perciò la disequazione diventa: $OC + OK + BO < AC + AK + OK + KB$

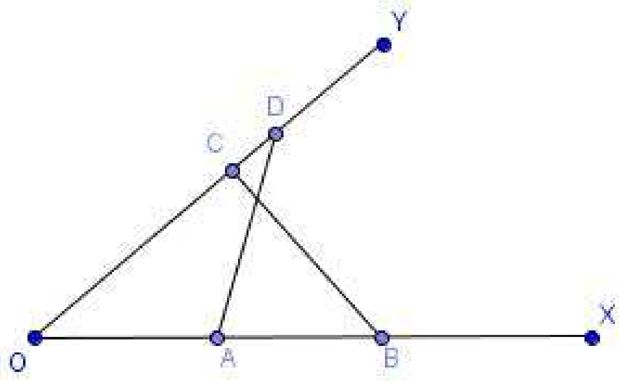
Semplificando il segmento OK che compare in entrambi i membri, e considerato che $AB \cong AK + KB$, otteniamo la tesi.

c.v.d.

6. È dato un angolo qualunque $X\hat{O}Y$. Sul lato OX prendi due punti A e B (OA < OB); sul lato OY prendi due punti C e D (OC < OD). Congiungi A con D e B con C. Dimostra che $AB + CD < AD + BC$.

Hp:
$A, B \in OX$
$OA < OB$
$C, D \in OY$
$OC < OD$

TESI: $AB + CD < AD + BC$



Dimostrazione:

Nel triangolo OAD vale la disuguaglianza triangolare: $OD < OA + AD$

Nel triangolo OBC vale la disuguaglianza triangolare: $BO < OC + BC$

Sommando membro a membro le due disequazioni, otteniamo: $OD + BO < OA + AD + OC + BC$ (1)

Ma $OD \cong OC + CD$ e $BO \cong OA + AB$

Sostituendo nella disequazione (1), otteniamo: $OC + CD + OA + AB < OA + AD + OC + BC$

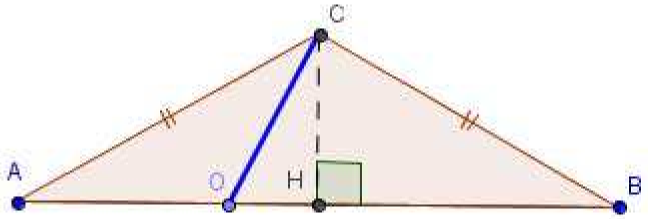
Semplificando i segmenti OC e OA che compaiono in entrambi i membri, otteniamo la tesi.

c.v.d.

7. Dimostra che il segmento che unisce il vertice di un triangolo isoscele con un punto della base è minore di ciascuno dei lati congruenti.

Hp:
$AC \cong BC$
$O \in AB$

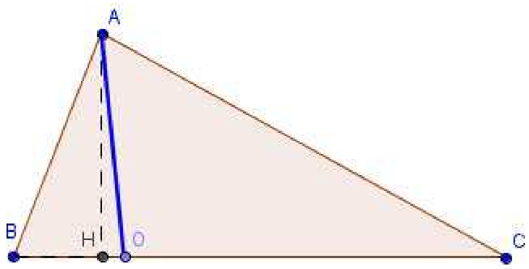
TESI: $OC < AC$



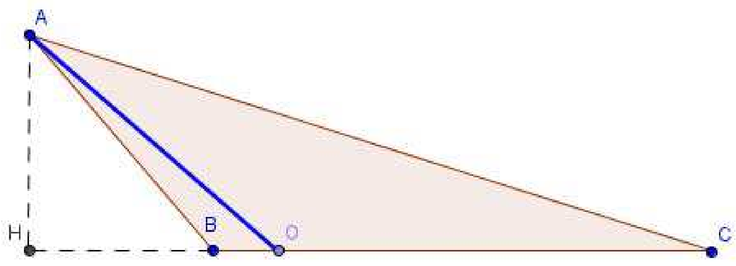
Dimostrazione:
Sia H il punto medio della base AB nonché, per le proprietà dei triangoli isosceli, piede della perpendicolare relativa alla base, tracciata dal segmento opposto C. Supponiamo che $AO < AH$ (funzionerebbe anche se ci trovassimo nel caso $AO > AH$, che sarebbe semplicemente simmetrico).
Per il primo teorema dell'angolo esterno, $A\hat{O}C > C\hat{B}O$, ma siccome per ipotesi il triangolo ABC è isoscele di base AB, gli angoli adiacenti alla base sono congruenti, perciò: $C\hat{B}O \cong C\hat{A}O$ e se ne deduce che nel triangolo AOC: $A\hat{O}C > C\hat{A}O$. Dato che in un triangolo con due angoli disuguali, all'angolo maggiore è opposto il lato maggiore, concludiamo che $AC > OC$. In altre parole, visto che i due lati del triangolo sono congruenti, vale la tesi, cioè il segmento che unisce il vertice di un triangolo isoscele con un punto qualsiasi della base è minore di ciascuno dei lati congruenti.
Se O coincidesse con H, l'angolo $C\hat{H}A$ sarebbe retto, perciò sicuramente maggiore di entrambi gli altri angoli del triangolo AHC, visto che un triangolo con un angolo retto ha gli altri due angoli acuti. Anche in questo caso, dato che in un triangolo con due angoli disuguali, all'angolo maggiore è opposto il lato maggiore, concludiamo che $AC > OC$.

c.v.d.

8. Dimostra che in ogni triangolo il segmento che congiunge un vertice con un punto qualunque del lato opposto è minore di uno almeno degli altri due lati.



caso a



caso b

Hp: $O \in BC$

TESI: $AO < AC$ oppure $AO < AB$

Dimostrazione:
Consideriamo il primo caso, ovvero il caso di un triangolo acutangolo. Tracciamo l'altezza AH, relativa al lato BC. Nel caso rappresentato $BO > BH$ (il caso in cui $BH > BO$ è semplicemente simmetrico). Il triangolo AOC è un triangolo ottusangolo e AC è il lato opposto all'angolo ottuso, perciò dato che in un triangolo con due angoli disuguali, all'angolo maggiore è opposto il lato maggiore, concludiamo che $AC > AO$.
Nel secondo caso, quello di un triangolo ottusangolo, il triangolo AOC è per forza ottusangolo e AC è il lato opposto all'angolo ottuso, perciò dato che in un triangolo con due angoli disuguali, all'angolo maggiore è opposto il lato maggiore, concludiamo che $AC > AO$.

c.v.d.