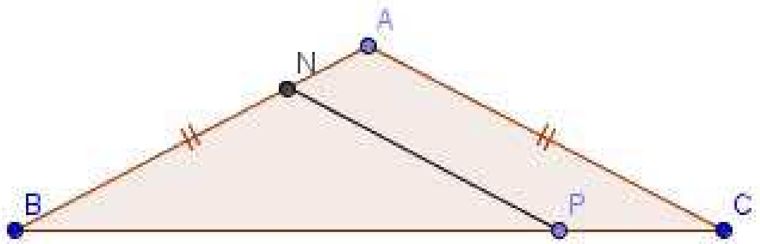
1. Considera un triangolo isoscele ABC. Da un punto P della base BC conduci la parallela al lato AC che interseca AB in N. Dimostra che il triangolo BPN è isoscele.

Hp:
$AB \cong AC$
$P \in BC$
$PN \parallel AC$
$N \in AB$

TESI: $NP \cong NB$



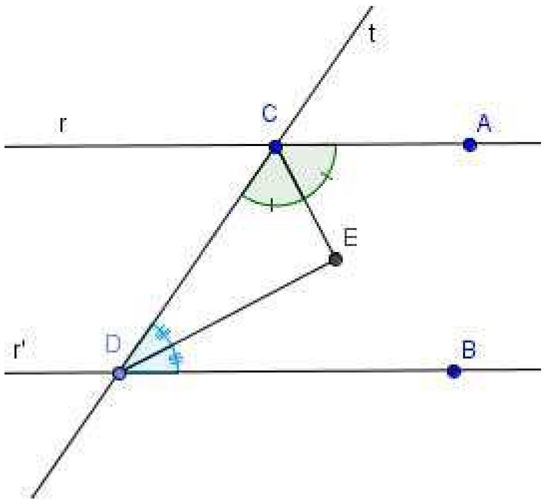
Dimostrazione:
Considerando le rette parallele PN e AC (parallele per ipotesi), tagliate dalla trasversale BC, gli angoli $N\hat{P}B \cong A\hat{C}B$ sono congruenti, perché angoli corrispondenti in rette parallele tagliate da una trasversale. Inoltre, $A\hat{B}C \cong A\hat{C}B$, perché angoli alla base di un triangolo isoscele. Per la proprietà transitiva della congruenza, quindi, $A\hat{B}C \cong N\hat{P}B$ perciò il triangolo BPN è un triangolo isoscele perché ha due angoli alla base congruenti.

c.v.d.

2. Dimostra che le bisettrici di due angoli coniugati interni, formati da due rette parallele con una trasversale, sono perpendicolari.

Hp:
$r \parallel r'$
$r \cap t = \{C\}$
$r' \cap t = \{D\}$
$A \in r$
$B \in r'$
$A\hat{C}E \cong E\hat{C}D$
$C\hat{D}E \cong E\hat{D}B$

TESI:
$CE \perp DE$



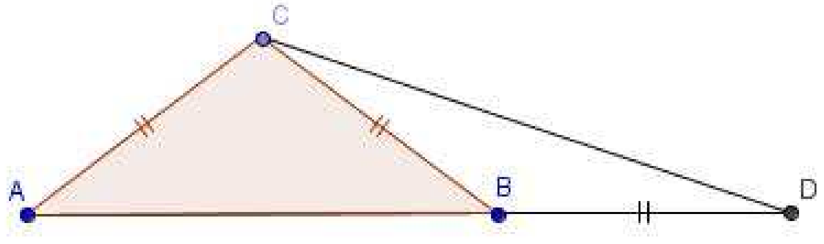
Dimostrazione:
Perché valga la tesi l'angolo $C\hat{E}D$ deve essere retto e siccome la somma degli angoli interni di un triangolo è di 180°, la somma degli altri angoli del triangolo CDE, ovvero $D\hat{C}E$ e $C\hat{D}E$, deve essere di 90°.
Per ipotesi, $A\hat{C}E \cong E\hat{C}D$, perciò $E\hat{C}D \cong \frac{1}{2}\,A\hat{C}D$ e, analogamente, dato che per ipotesi $C\hat{D}E \cong E\hat{D}B$, ne deduciamo che $C\hat{D}E \cong \frac{1}{2}C\hat{D}B$, quindi: $D\hat{C}E + C\hat{D}E \cong \frac{1}{2}\,A\hat{C}D + \frac{1}{2}C\hat{D}B = \frac{1}{2}\,(A\hat{C}D + C\hat{D}B)$.
I due angoli $A\hat{C}D$ e $C\hat{D}B$ sono angoli coniugati in una coppia di rette parallele *r* e *r'* tagliate dalla trasversale *t*, perciò sono supplementari, perciò: $D\hat{C}E + C\hat{D}E = \frac{1}{2}\,(180°) = 90°$.

c.v.d.

3. Prolunga la base AB del triangolo isoscele ABC del segmento $BD \cong BC$ e congiungi C con D. Dimostra che l'angolo $C\hat{D}B$ è metà dell'angolo $C\hat{A}B$.

Hp:
$AC \cong BC$
A, B, D allineati
$BD \cong BC$

TESI:
$C\hat{D}B \cong \frac{1}{2} C\hat{A}B$



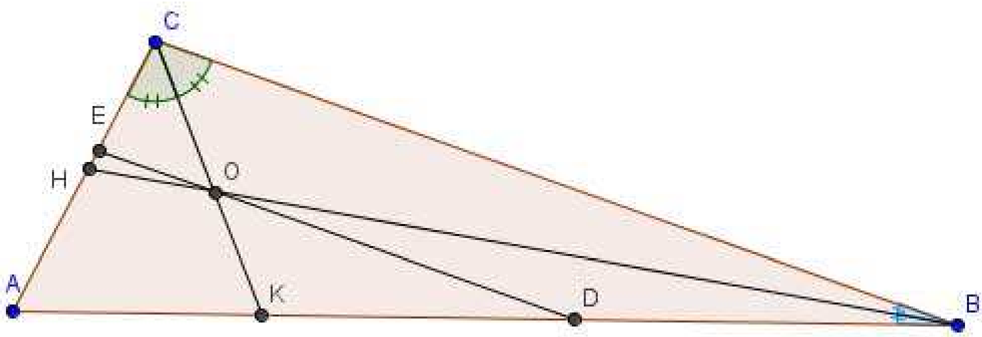
Dimostrazione:
Il triangolo CBD è un triangolo isoscele, dato che, per ipotesi, $BD \cong BC$, di conseguenza, gli angoli alla base del triangolo dato sono congruenti: $C\hat{D}B \cong D\hat{C}B$.
Per il secondo teorema dell'angolo esterno: $A\hat{B}C \cong C\hat{D}B + D\hat{C}B$ ovvero, per quanto detto prima: $A\hat{B}C \cong 2\,C\hat{D}B$. Siccome il triangolo ABC è isoscele per ipotesi, $A\hat{B}C \cong C\hat{A}B$ e quindi, per la proprietà transitiva della congruenza: $C\hat{A}B \cong 2\,C\hat{D}B$.
Dividendo entrambi i membri dell'equazione per 2, otteniamo la tesi: $C\hat{D}B \cong \frac{1}{2} C\hat{A}B$.

c.v.d.

4. Dato il triangolo ABC, condotte le bisettrici dei due angoli di vertici B e C, dal loro punto di incontro conduci la parallela al lato BC che incontri in D e in E rispettivamente i lati AB, AC; dimostra che DE è congruente alla somma di BD e CE.

Hp:
$A\hat{C}K \cong K\hat{C}B$
$A\hat{B}H \cong H\hat{B}C$
$BH \cap CK = \{O\}$
$DE \parallel BC$
E, O, D allineati
$D \in AB$
$E \in AC$

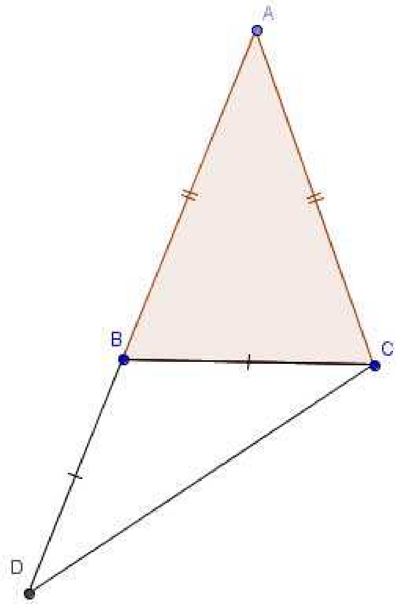
TESI:
$DE \cong BD + CE$



Dimostrazione:
Considero le parallele CB e DE (parallele per ipotesi), tagliate dalla trasversale BO: $C\hat{B}O \cong E\hat{O}H$, perché angoli corrispondenti. Siccome $D\hat{O}B \cong E\hat{O}H$ perché angoli opposti al vertice, per la proprietà transitiva della congruenza $D\hat{O}B \cong C\hat{B}O$, ma $O\hat{B}D \cong C\hat{B}O$ per ipotesi e quindi – sempre per la proprietà transitiva della congruenza – $D\hat{O}B \cong O\hat{B}D$ e quindi il triangolo ODB è isoscele sulla base OB, perciò $OD \cong DB$. (1)
Considero le parallele CB e DE (parallele per ipotesi), tagliate dalla trasversale CK: $B\hat{C}O \cong D\hat{O}K$, perché angoli corrispondenti. Siccome $D\hat{O}K \cong C\hat{O}E$ perché angoli opposti al vertice, per la proprietà transitiva della congruenza $B\hat{C}O \cong C\hat{O}E$, ma $B\hat{C}O \cong O\hat{C}E$ per ipotesi e quindi – sempre per la proprietà transitiva della congruenza – $C\hat{O}E \cong O\hat{C}E$ e quindi il triangolo EOC è isoscele sulla base OC, perciò $OE \cong EC$. (2)
Quindi: $DE \cong DO + OE \cong BD + CE$ per quanto dimostrato in (1) e (2).

c.v.d.

5. È dato il triangolo isoscele ABC di base BC; prolunga il lato AB, dalla parte di B, di un segmento $BD \cong BC$ e congiungi C con D. Dimostra che l'angolo $A\widehat{D}C$ è la terza parte dell'angolo $A\hat{C}D$.



Hp:
$AB \cong AC$
A, B, D allineati
$BC \cong BD$

TESI:

$$A\widehat{D}C \cong \frac{1}{3} A\hat{C}D$$

Dimostrazione:
Siccome $BC \cong BD$ per ipotesi, il triangolo BCD è isoscele, perciò $B\widehat{D}C \cong B\hat{C}D$. (1)
Per il secondo teorema dell'angolo esterno:

$$A\hat{B}C \cong B\widehat{D}C + B\hat{C}D \cong_{(1)} 2 \cdot B\widehat{D}C \qquad (2)$$

Ma ABC è un triangolo isoscele per ipotesi, perciò $A\hat{B}C \cong B\hat{C}A$ e quindi, per (2), otteniamo: $B\hat{C}A \cong 2 \cdot B\widehat{D}C$. (3)

Inoltre: $A\hat{C}D \cong B\hat{C}A + B\hat{C}D \cong_{(3)} 2 \cdot B\widehat{D}C + B\hat{C}D \cong_{(1)} 2 \cdot B\widehat{D}C + B\widehat{D}C = 3 \cdot B\widehat{D}C$

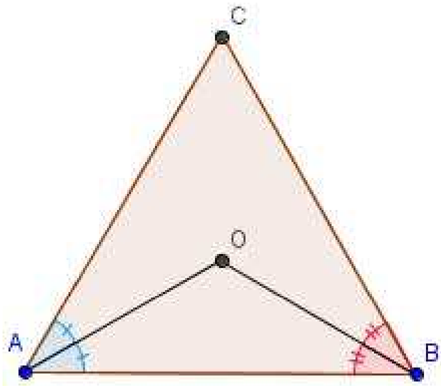
E, dividendo entrambi i membri per 3, otteniamo la tesi: $B\widehat{D}C \cong \frac{1}{3} A\hat{C}D$

c.v.d.

6. Dimostra che l'angolo convesso formato dalle bisettrici di due angoli di un triangolo equilatero è doppio di ciascun angolo del triangolo.

Hp:
$AB \cong BC \cong CA$
$C\hat{A}O \cong O\hat{A}B$
$A\hat{B}O \cong O\hat{B}C$

TESI:
$A\hat{O}B \cong 2 \cdot C\hat{A}B$



Dimostrazione:
Sapendo che AO è la bisettrice (per ipotesi) di un angolo di 60° (il triangolo ABC per ipotesi è equilatero e i triangoli equilateri hanno tutti angoli di 60°), allora:

$$C\hat{A}O \cong O\hat{A}B = 30°$$

Per lo stesso motivo:

$$A\hat{B}O \cong O\hat{B}C = 30°$$

La somma degli angoli interni di un triangolo vale 180°, perciò:
$A\hat{O}B + O\hat{A}B + A\hat{B}O = 180° \quad \Longrightarrow \quad A\hat{O}B + 30° + 30° = 180°° \quad \Longrightarrow \quad A\hat{O}B = 120° = 2 \cdot 60° = 2 \cdot C\hat{A}B$

c.v.d.