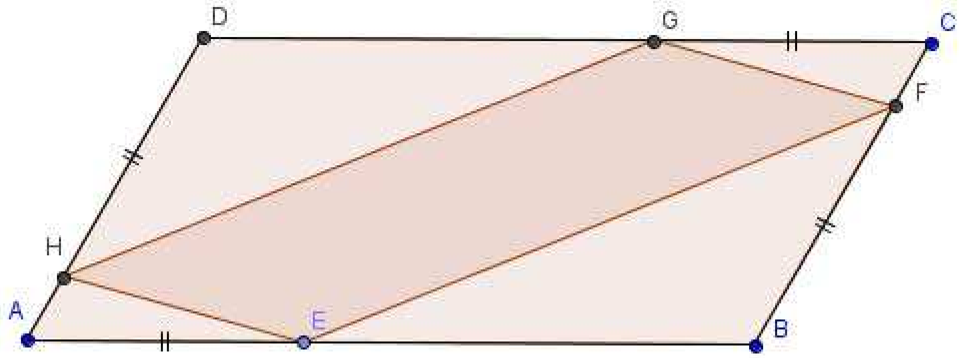
1. Prendi su ciascun lato del parallelogramma ABCD i segmenti AE, BF, CG, DH fra loro congruenti; dimostra che il quadrilatero EFGH è un parallelogramma.

Hp:
ABCD parallelogrammo
$E \in AB$
$F \in BC$
$G \in CD$
$H \in DA$
$AE \cong BF \cong GC \cong DH$

TESI:
EFGH parallelogrammo



<u>Dimostrazione</u>:
Considero i triangoli AEH e GFC. Essi hanno:

$AE \cong GC$	per ipotesi	
$AH \cong CF$	per differenza di segmenti congruenti	i due triangoli sono congruenti per il primo criterio
$G\hat{C}F \cong H\hat{A}E$	angoli opposti in un parallelogramma	

Di conseguenza, $GF \cong HE$ perché elementi corrispondenti in triangoli congruenti.

Considero i triangoli EBF e DHG. Essi hanno:

$BF \cong DH$	per ipotesi	
$BE \cong DG$	per differenza di segmenti congruenti	i due triangoli sono congruenti per il primo criterio
$E\hat{B}F \cong G\hat{D}H$	angoli opposti in un parallelogramma	

Di conseguenza, $GH \cong EF$ perché elementi corrispondenti in triangoli congruenti.

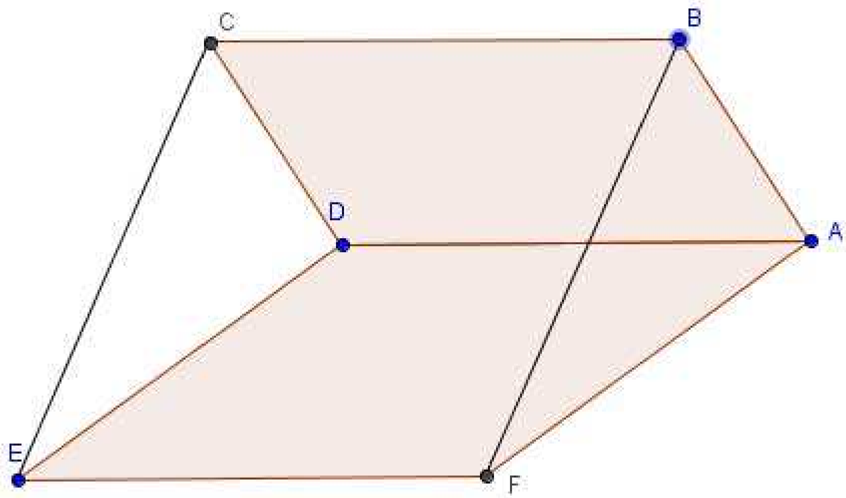
Il quadrilatero EFGH ha due coppie di lati opposti congruenti, perciò è un parallelogramma.

c.v.d.

2. I due parallelogrammi ABCD, ADEF hanno il lato AD in comune. Dimostra che i punti B, C, E, F, se non sono su una stessa retta, sono vertici di un parallelogramma.

Hp:
ABCD parallelogrammo
ADEF parallelogrammo

TESI:
BCEF parallelogrammo



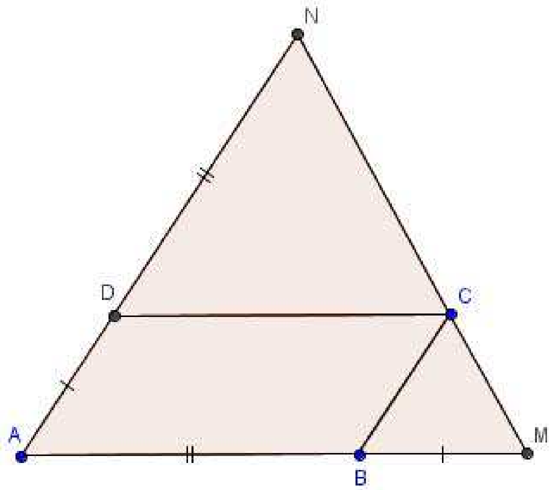
<u>Dimostrazione</u>:
Visto che ABCD è un parallelogrammo i due lati opposti AD e BC sono paralleli e congruenti.
Visto che ADEF è un parallelogrammo i due lati opposti AD e EF sono paralleli e congruenti.
Per la proprietà transitiva, i due lati BC e EF sono paralleli e congruenti, perciò BCEF è un parallelogrammo.

c.v.d.

3. Prolunga, rispettivamente oltre B e oltre D, i lati AB e AD del parallelogramma ABCD dei segmenti $BM \cong AD$ e $DN \cong AB$. Dimostra che i triangoli DNC, BMC sono isosceli e che i punti M, N, C sono in linea retta.

Hp:
A, B, M allineati
$BM \cong AD$
A, D, N allineati
$DN \cong AB$

TESI:
DNC isoscele
BMC isoscele
M, N, C allineati



Dimostrazione:
Consideriamo il triangolo DNC:
$DN \cong AB$ per ipotesi
$AB \cong DC$ perché lati opposti di un parallelogramma (ABCD)
Per la proprietà transitiva della congruenza, $DN \cong DC$, perciò il triangolo DNC è isoscele di base NC.

Consideriamo il triangolo BCM:
$BM \cong AD$ per ipotesi
$AD \cong BC$ perché lati opposti di un parallelogramma (ABCD)
Per la proprietà transitiva della congruenza, $BM \cong BC$, perciò il triangolo BMC è isoscele di base MC.

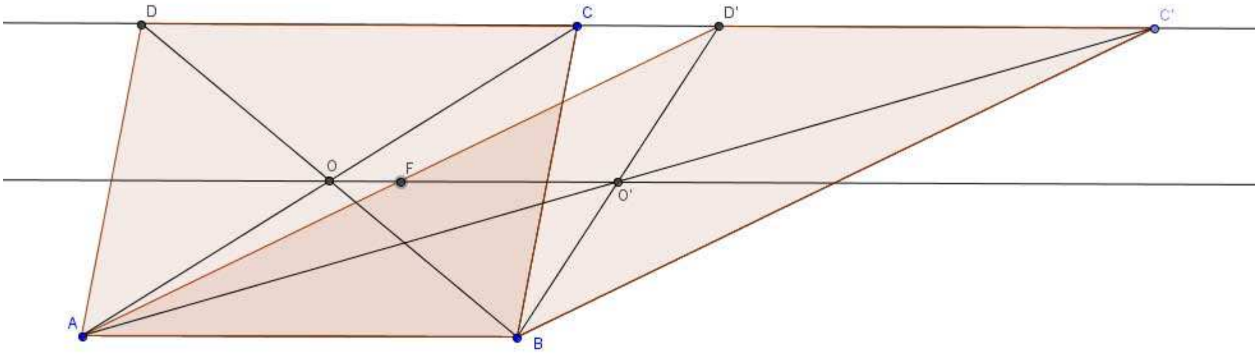
Inoltre:
$C\hat{B}M \cong D\hat{A}B$ perché angoli corrispondenti in rette parallele AD e BC tagliate dalla trasversale AB
$N\hat{D}C \cong D\hat{A}B$ perché angoli corrispondenti in rette parallele DC e AB tagliate dalla trasversale AD
Per la proprietà transitiva della congruenza, $C\hat{B}M \cong N\hat{D}C$. (1)

Nel triangolo BMC: $B\widehat{M}C \cong B\hat{C}M \cong \frac{180°-C\hat{B}M}{2}$, mentre nel triangolo DCN: $D\hat{C}N \cong D\widehat{N}C \cong \frac{180°-N\hat{D}C}{2}$.

Per la congruenza (1), vale quindi: $B\widehat{M}C \cong D\hat{C}N$ che sono angoli corrispondenti in rette parallele BM e DC con trasversale NM, perciò N, C, M sono allineati.

c.v.d.

4. Trova il luogo dei centri dei parallelogrammi che hanno una base comune e medesima altezza *h*.



Hp:
ABCD parallelogrammo
ABC'D' parallelogrammo
$d(D;AB) \cong d(D';AB) = h$

TESI:
$OO' \parallel AB$
$d(D;OO') = \frac{h}{2}$

Dimostrazione:
Consideriamo il triangolo ACD' e sia F il punto medio del lato AD'.
Visto che O è il punto medio del lato AC – in un parallelogramma le diagonali si dividono reciprocamente a metà – congiungendo i punti O e F ottengo un segmento OF parallelo alla base del triangolo CD' e quindi parallelo alla base AB (visto che la retta su cui si trovano i lati CD e C'D' opposti al lato AB dei parallelogrammi è parallela alla retta AB).

Consideriamo il triangolo AC'D' e sia F il punto medio del lato AD'.
Visto che O' è il punto medio del lato AC', congiungendo i punti O' e F ottengo un segmento O'F parallelo ad AB (analogamente a quanto visto prima).

In altre parole O e O' sono allineati con F e si trovano su una retta parallela alla base AB.

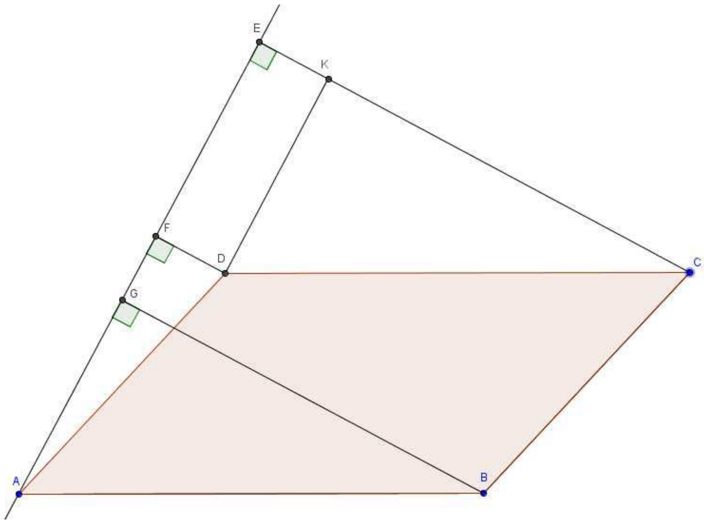
Inoltre la loro distanza dalla base AB è congruente a metà dell'altezza, in quanto se considerassi un segmento perpendicolare alla retta AB, per il teorema di Talete siccome O è il punto medio del lato AC, tracciando da esso una parallela ad AB intercetterei il segmento perpendicolare nel suo punto medio (dove il segmento in questione ha un estremo sul punto AB e l'altro estremo sulla retta del lato CD), perciò la distanza di O da AB è h/2.

c.v.d.

5. Dal vertice A del parallelogramma ABCD conduci una retta che non abbia altri punti in comune con il parallelogramma; dimostra che la distanza del vertice C da tale retta è la somma delle distanze dei vertici B e D dalla retta stessa.

Hp:
ABCD parallelogrammo
$ABCD \cap r = \{A\}$
$E, F, G \in r$
$CE \perp r$
$DF \perp r$
$BG \perp r$

TESI:
$CE = DF + BG$



Dimostrazione:
Proiettiamo innanzi tutto D su CE, ottenendo il punto K.
Consideriamo i triangoli DKC e AGB. Essi hanno:

$DC \cong AB$ lati opposti in un parallelogrammo
$D\hat{C}K \cong A\hat{B}G$ angoli determinati da semirette parallele e concordi ($CK \parallel GB$ perché entrambe perpendicolari per ipotesi alla stessa retta r; $AB \parallel CD$ perché lati opposti di un parallelogrammo)

Perciò i due triangoli sono congruenti per il secondo criterio generalizzato e, di conseguenza, $CK \cong GB$ perché elementi corrispondenti in triangoli congruenti. (1)

EFDK è un rettangolo, perché i lati opposti sono paralleli e i lati adiacenti perpendicolari: infatti, $DF \parallel EK$ perché entrambi perpendicolari per ipotesi alla stessa retta r e $EF \parallel DK$ perché DK è la proiezione su CE, perciò $DK \perp EC$ e $EC \perp r$ per ipotesi. Inoltre, da quanto detto, $K\hat{E}F \cong E\hat{F}D = 90°$. Per questo motivo, $EK \cong FD$ perché lati opposti di un rettangolo. (2)

Di conseguenza:

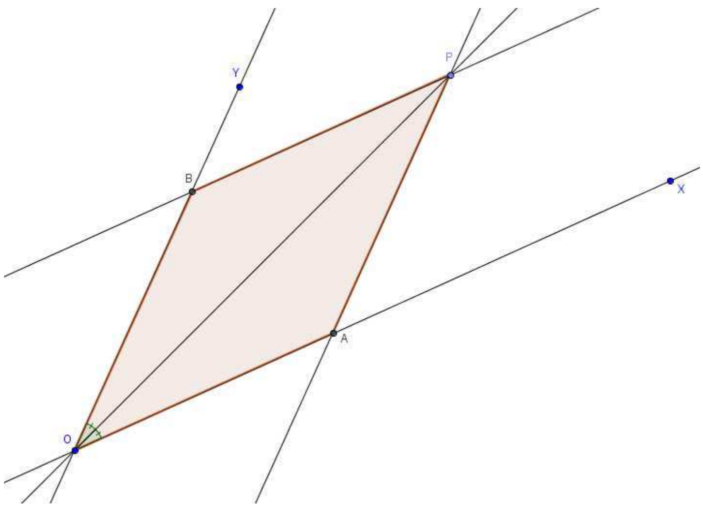
$$CE = CK + KE \cong BG_{(1)} + FD_{(2)}$$

c.v.d.

6. Dimostra che se da un punto qualunque della bisettrice di un angolo si tracciano le parallele ai lati, si ottiene un rombo.

Hp:
$X\hat{O}P \cong P\hat{O}Y$
$A \in OX$
$B \in OY$
$AP \parallel OY$
$PB \parallel OX$

TESI:
OAPB rombo



Dimostrazione:
$BP \parallel OA$ e $AP \parallel OB$ per ipotesi, perciò OAPB è un parallelogrammo. Inoltre, il parallelogramma è tale per cui (per ipotesi) un suo angolo ha per bisettrice la diagonale passante per il suo vertice, perciò è un rombo.

c.v.d.