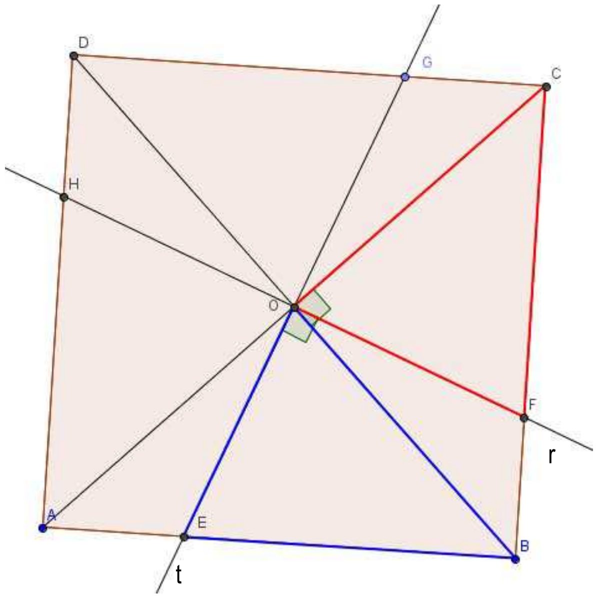
7. Dimostra che i segmenti di due rette perpendicolari fra loro, condotte per il centro di un quadrato e aventi gli estremi sui suoi lati, sono congruenti.

Hp:
$r \perp t$
ABCD quadrato
$DB \cap AC = \{O\}$
$t \cap r = \{O\}$
$E \in AB \cap t$
$F \in BC \cap r$
$G \in CD \cap t$
$H \in DA \cap r$

TESI:
$OE \cong OF \cong OG \cong OH$



Dimostrazione:

Considero i triangoli EBO e FOC. Essi hanno:

$BO \cong OC$	perché le diagonali in un quadrato si tagliano vicendevolmente a metà
$E\hat{B}O \cong F\hat{C}O$	perché le diagonali di un quadrato sono anche bisettrici e gli angoli di un quadrato sono tutti retti
$E\hat{O}B \cong C\hat{O}F$	perché complementari di uno stesso angolo, $B\hat{O}F$, considerato che $OE \perp OF$ per ipotesi e $OB \perp OC$ perché diagonali di un quadrato

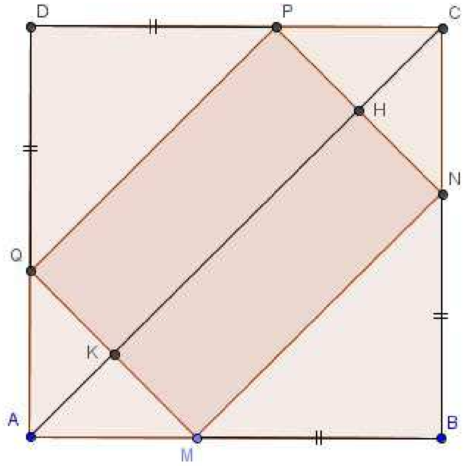
I due triangoli sono congruenti per il secondo criterio e $OE \cong OF$ perché elementi corrispondenti in triangoli congruenti.
Analogamente considerando i triangoli GOD e HAO, si ottiene la tesi.

c.v.d.

8. Sui lati AB, BC, CD, DA di un quadrato prendi rispettivamente i punti M, N, P, Q in modo che sia $MN \cong BN \cong DP \cong DQ$. Dimostra che il quadrilatero MNPQ è un rettangolo il cui perimetro non varia al variare della posizione dei punti M, N, P, Q sui lati del quadrato.

Hp:
ABCD quadrato
$M \in AB$
$N \in BC$
$P \in CD$
$Q \in DA$
$BM \cong BN \cong DP \cong DQ$

TESI:
MNPQ rettangolo
$QM + MN = cost.$



Dimostrazione:
Consideriamo i triangoli MNB e PDQ. Essi hanno:

$MB \cong DP$ per ipotesi
$BN \cong DQ$ per ipotesi
$M\hat{B}N \cong P\hat{D}Q$ perché angoli opposti di un quadrato

i due triangoli sono congruenti per il primo criterio

Di conseguenza, $MN \cong QP$ perché elementi corrispondenti in triangoli congruenti.
Analogamente possiamo considerare i triangoli NCP e QAM e dimostrare che sono congruenti per il primo criterio, perciò $QM \cong PN$ perché elementi corrispondenti in triangoli congruenti. Avendo due coppie di lati opposti congruenti, il quadrilatero MNPQ è un parallelogrammo.

MBN, NCP, PDQ e QAM sono triangoli rettangoli isosceli ($BM \cong BN$ per ipotesi e $CN \cong CP$ perché differenza di segmenti congruenti), perciò $B\widehat{N}M = 45° = P\widehat{N}C$ e siccome supplementari di $P\widehat{N}M$ tale angolo è retto. Perciò il quadrilatero MNPQ è un rettangolo.

Siano $H = PN \cap CA$ e $K = MQ \cap CA$, allora $HK \cong MN$ perché $CA \parallel MN$ e $PN \parallel QM$, quindi segmenti paralleli compresi tra rette parallele sono congruenti. Per la proprietà transitiva, $HK \cong QP$. Inoltre $CH \cong HN$ perché CHN è un triangolo rettangolo isoscele e per lo stesso motivo (il triangolo AKM è rettangolo isoscele) $AK \cong KM$, $CH \cong HP$ (CHP è un triangolo rettangolo isoscele) $AK \cong QK$ (AKQ è un triangolo rettangolo isoscele). Da queste congruenze possiamo inoltre dedurre che:

$$PH \cong HN \cong KM \cong QK$$

Il perimetro del rettangolo MNPQ è quindi dato da:

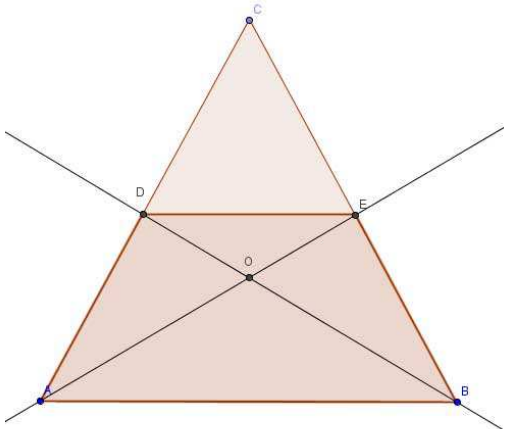
$$2p\ (MNPQ) = 2(MN + NH + KM) \cong 2(HK + CH + KA) = 2CA$$

c.v.d.

9. In un triangolo isoscele considera il segmento che congiunge i punti di intersezione dei lati congruenti con le bisettrici degli angoli alla base; dimostra che tale segmento divide il triangolo in due parti di cui una è un trapezio isoscele avente i lati non paralleli congruenti alla base minore.

Hp:
$AC \cong BC$
$C\hat{A}E \cong E\hat{A}B$
$A\hat{B}D \cong D\hat{B}E$
$E \in BC$
$D \in AC$
$AE \cap BD = \{O\}$

TESI:
ABED trapezio isoscele
$AD \cong DE \cong EB$



Dimostrazione:

Il triangolo ABO è isoscele perché i due angoli alla base sono metà di angoli congruenti, perché a loro volta angoli alla base del triangolo ABC isoscele per ipotesi, perciò $AO \cong OB$.

Consideriamo i triangoli AOD e BOE. Essi hanno:

$AO \cong OB$ per precedente dimostrazione
$A\hat{O}D \cong B\hat{O}E$ perché angoli opposti al vertice — i due triangoli sono congruenti per il secondo criterio
$D\hat{A}O \cong O\hat{B}E$ perché metà di angoli congruenti

Perciò $AD \cong EB$ (1) e $DO \cong OE$ (2) perché elementi corrispondenti in triangoli congruenti.

ODE è un triangolo isoscele (per (2)) e quindi $O\hat{D}E \cong O\hat{E}D$ perché angoli alla base di un triangolo isoscele.

CDE è un triangolo isoscele, perché $AD \cong EB$ per (1) e, in quanto differenza di segmenti congruenti, $CD \cong CE$, perciò $C\hat{D}E \cong C\hat{E}D$ perché angoli alla base di un triangolo isoscele.

Considerando la soma degli angoli interni del triangolo CDE: $C\hat{D}E + C\hat{E}D + D\hat{C}E = 180°$.
Considerando la soma degli angoli interni del triangolo ABC: $C\hat{A}B + A\hat{B}C + A\hat{C}B = 180°$.
Sottraendo le due equazioni membro a membro, otteniamo:

$$C\hat{D}E + C\hat{E}D \cong C\hat{A}B + A\hat{B}C$$

Ma gli angoli a primo membro sono congruenti fra di loro, visto che CDE è un triangolo isoscele e allo stesso modo gli angoli a secondo membro, visto ABC è un triangolo isoscele, perciò:

$$2C\hat{D}E \cong 2C\hat{A}B \quad \Rightarrow \quad C\hat{D}E \cong C\hat{A}B$$

I due angoli sono angoli corrispondenti in rette DE e AB tagliate dalla trasversale CA, perciò $DE \parallel AB$, quindi ABED è un trapezio. È isoscele perché, per (1), $AD \cong EB$.

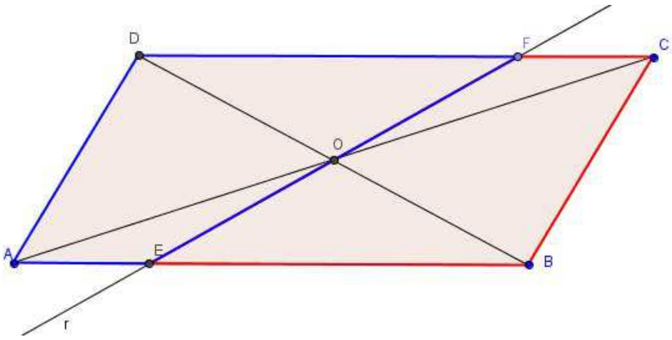
Siccome $DE \parallel AB$, $E\hat{D}B \cong D\hat{B}A$ perché angoli alterni interni nelle rette parallele DE e AB tagliate dalla trasversale DB. Ma $D\hat{B}E \cong D\hat{B}A$ per ipotesi perciò, per la proprietà transitiva: $E\hat{D}B \cong D\hat{B}E$ e quindi il triangolo EDB è isoscele e di conseguenza:

$$DE \cong EB$$

Avendo dimostrato che $AD \cong EB$ per (1), otteniamo la tesi.

c.v.d.

10. Dimostra che una qualunque retta condotta per il punto di incontro delle diagonali di un parallelogramma lo divide in due trapezi congruenti, aventi cioè i lati e gli angoli rispettivamente congruenti.



Hp:
ABCD parallelogrammo
$AC \cap BD = \{O\}$
$O \in r$
$r \cap AB = \{E\}$
$r \cap CD = \{F\}$

TESI:
EBCF trapezio isoscele
EFDA trapezio isoscele
$EBCF \cong EFDA$

Dimostrazione:
$FC \parallel EB$ perché su lati opposti di un parallelogramma, perciò EBCF è un trapezio. Analogamente per il quadrilatero EFDA.
Consideriamo i triangoli AEO e OCF. Essi hanno:

$AO \cong OC$	perché in un parallelogrammo le diagonali si tagliano vicendevolmente a metà
$O\hat{F}C \cong O\hat{E}A$	perché angoli alterni interni in rette parallele AB e CD tagliate dalla trasversale r
$A\hat{O}E \cong F\hat{O}C$	perché angoli opposti al vertice

I due triangoli sono congruenti per il secondo criterio, perciò $FC \cong AE$, perché elementi corrispondenti in triangoli congruenti.

Considero i trapezi EBCF e EFDA. Essi hanno:

$FC \cong AE$	per precedente dimostrazione
$FD \cong EB$	per differenza di segmenti congruenti
$AD \cong BC$	perché lati opposti di un parallelogrammo
EF	in comune
$O\hat{F}C \cong O\hat{E}A$	perché angoli alterni interni in rette parallele AB e CD tagliate dalla trasversale r
$O\hat{F}D \cong O\hat{E}B$	perché angoli alterni interni in rette parallele AB e CD tagliate dalla trasversale r
$D\hat{A}B \cong F\hat{C}B$	perché angoli opposti di un parallelogrammo
$F\hat{D}A \cong E\hat{B}C$	perché angoli opposti di un parallelogrammo

c.v.d.