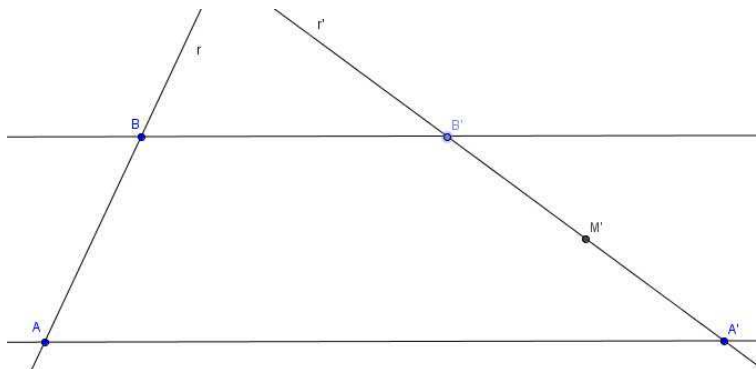


11. Considera un fascio di rette parallele tagliato da due trasversali  $r$  e  $r'$ . Nella corrispondenza di Talete così individuata tra i punti di  $r$  e di  $r'$ , dimostra che se  $A'B'$  è il segmento di  $r'$  corrispondente al segmento  $AB$  di  $r$ , al punto medio di  $AB$  corrisponde il punto medio di  $A'B'$ .

Hp:  
 $a \parallel b$   
 $r \cap a = \{A\}$   
 $r \cap b = \{B\}$   
 $r' \cap a = \{A'\}$   
 $r' \cap b = \{B'\}$   
 $M' \in r'$   
 $A'M' \cong M'B'$   
 $M \in r$



TESI:  
 $AM \cong MB$

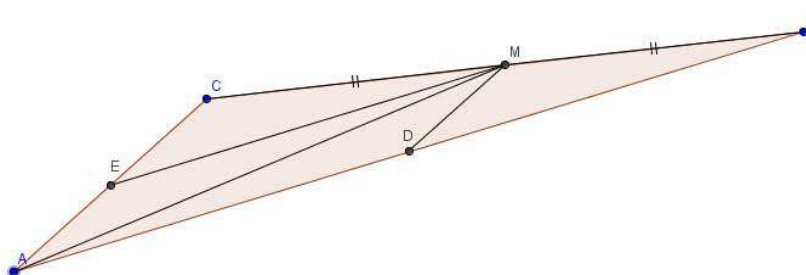
**Dimostrazione:**

Consideriamo la retta  $c$  passante per  $M'$  e parallela alla retta  $AA'$ . Essa interseca la retta  $r$  in un punto  $M$ . Per un teorema so che se un fascio di rette parallele è tagliato da due trasversali, a segmenti congruenti dell'una corrispondono segmenti congruenti dell'altra, perciò se  $A'M' \cong M'B'$  (per ipotesi) allora  $AM \cong MB$  (tesi).

c.v.d.

12. In un triangolo è tracciata una mediana; dimostra che se dal punto in cui essa dimezza il lato relativo si conducono le parallele agli altri due lati, si divide il triangolo dato in quattro triangoli a due a due congruenti.

Hp:  
 $M \in BC$   
 $BM \cong MC$   
 $ME \parallel AB$   
 $MD \parallel AC$



TESI:  
 $MDB \cong CEM$   
 $MDA \cong AEM$

**Dimostrazione:**

Siccome  $BM \cong MC$  per ipotesi, allora  $AD \cong DB$ , perché se per il punto medio di un lato di un triangolo si conduce la parallela a un altro lato, questa dimezza il terzo lato. (1)

Considero quindi i triangoli AEM e MDA. Essi hanno:

$AM$  in comune  
 $\widehat{EMA} \cong \widehat{MDA}$  perché angoli alterni interni in rette parallele (ME e AD per ipotesi) tagliate dalla trasversale AM  
 $\widehat{AMD} \cong \widehat{EAM}$  perché angoli alterni interni in rette parallele (MD e AC per ipotesi) tagliate dalla trasversale AM

I due triangoli sono congruenti per il secondo criterio di congruenza.

Considero i triangoli CEM e MDB. Essi hanno:

$BM \cong MC$  per ipotesi  
 $\widehat{BMD} \cong \widehat{CME}$  perché angoli corrispondenti in rette parallele (ME e DB per ipotesi) tagliate dalla trasversale CB  
 $EM \cong DB$  perché  $EM \cong AD$  perché elementi corrispondenti in triangoli congruenti (AEM e MDA) per precedente dimostrazione e  $DB \cong AD$  per (1), perciò, applicando la proprietà transitiva della congruenza,  $EM \cong DB$

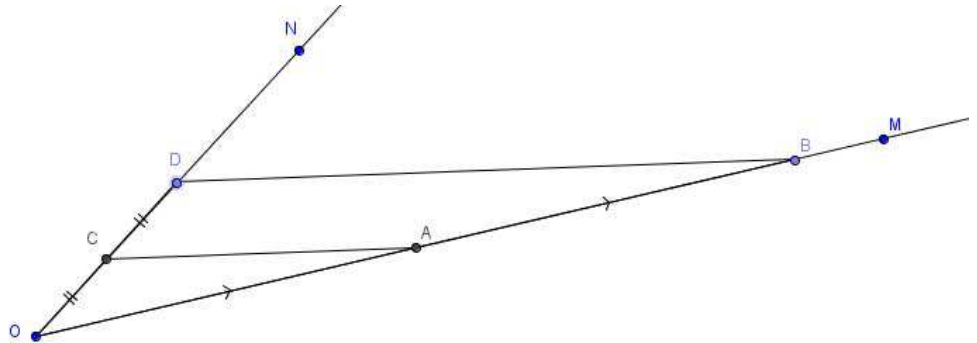
I due triangoli sono congruenti per il primo criterio di congruenza.

c.v.d.

13. È dato un angolo  $M\hat{O}N$ ; su uno dei lati, per esempio OM, prendi due punti A e B in modo che sia  $OA \cong AB$  e sull'altro ON prendi i punti C e D tali che sia  $OC \cong CD$ . Dimostra che il quadrilatero ABCD è un trapezio la cui base maggiore è doppia della base minore.

Hp:  
 $A, B \in OM$   
 $OA \cong AB$   
 $C, D \in ON$   
 $OC \cong CD$

TESI:  
 ABCD trapezio  
 $BD \cong 2AC$



**Dimostrazione:**

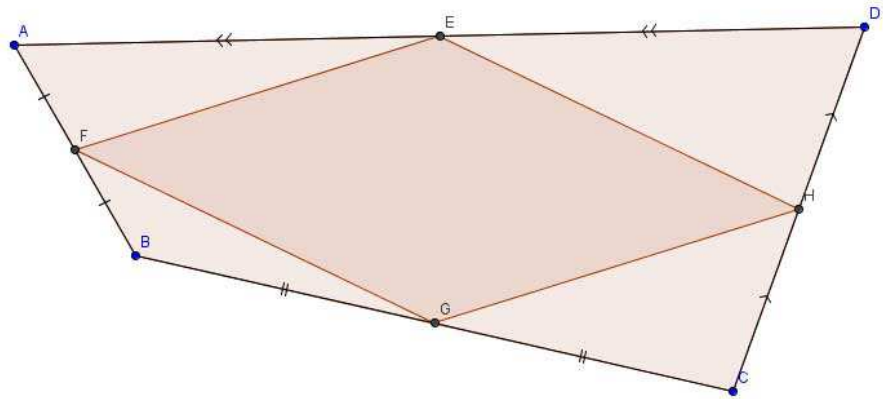
Considerando il triangolo OBD, il segmento che congiunge i punti medi di due lati è parallelo al terzo lato e congruente alla sua metà. Siccome quindi  $CA \parallel DB$ , il quadrilatero ABCD è un trapezio. Ed inoltre  $AC \cong \frac{1}{2}BD$ .

c.v.d.

14. Dimostra che i punti medi dei lati di un quadrilatero sono vertici di un parallelogramma. In quale caso questo parallelogramma è un rettangolo? In quale è un rombo? In quale è un quadrato?

Hp:  
 $F \in AB$   
 $AF \cong FB$   
 $G \in BC$   
 $BG \cong GC$   
 $H \in CD$   
 $CH \cong HD$   
 $E \in DA$   
 $DE \cong EA$

TESI:  
 EFGH parallelogrammo  
 Quando EFGH rettangolo?  
 Quando EFGH rombo?  
 Quando EFGH quadrato?



**Dimostrazione:**

Considerando il triangolo ACD, il segmento che congiunge i punti medi dei lati AD e DC è parallelo al terzo lato AC e congruente alla sua metà. Quindi  $EH \parallel AC$  e  $EH \cong \frac{1}{2}AC$ .

Considerando il triangolo ABC, il segmento che congiunge i punti medi dei lati AB e BC è parallelo al terzo lato AC e congruente alla sua metà. Quindi  $FG \parallel AC$  e  $FG \cong \frac{1}{2}AC$ .

Per la proprietà transitiva della congruenza e del parallelismo,  $EH \parallel FG$  e  $EH \cong FG$ , perciò EFGH è un parallelogrammo.

Perché EFGH sia un rettangolo, deve verificarsi che due lati consecutivi siano perpendicolari e siccome le coppie di lati opposti sono parallele, come detto precedentemente, alle diagonali del quadrilatero, perché EFGH sia un rettangolo, ABCD deve avere le diagonali perpendicolari.

Perché EFGH sia un rombo, deve verificarsi che due lati consecutivi siano congruenti e siccome le coppie di lati opposti sono congruenti alla metà della diagonale, come detto precedentemente, perché EFGH sia un rombo, ABCD deve avere le diagonali congruenti.

Perché EFGH sia un quadrato (contemporaneamente rettangolo e rombo), ABCD deve avere diagonali perpendicolari e congruenti.

c.v.d.