1. Data la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$, determina:
   A. le equazioni delle rette ad essa tangenti, condotte dal punto $P(-1; 3)$;
   B. i valori del parametro per il quale la retta $y = k\,(x - 4)$ è tangente alla circonferenza data
   C. l'equazione della tangente nel punto della circonferenza di ascissa 1 posto nel primo quadrante.

A. Considero il fascio proprio di rette di centro P, avendo verificato facilmente che il punto P non appartiene alla circonferenza.

$$y - 3 = m\,(x + 1) \qquad mx - y + m + 3 = 0$$

Determinato il centro $C\,(1; 0)$ e il raggio $r = 2$ della circonferenza, pongo la distanza del centro dalla retta del fascio uguale al raggio per determinare il parametro:

$$\frac{|\,m + m + 3\,|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 2 \qquad (2m + 3)^2 = 4\,(m^2 + 1) \qquad 4m^2 + 12m + 9 = 4m^2 + 4 \qquad \boldsymbol{m = -\frac{5}{12}}$$

La retta tangente ha quindi equazione: $\boldsymbol{5x + 12y - 31 = 0}$.
Siccome il punto è esterno alla circonferenza, avrei dovuto trovare due rette tangenti. La seconda retta sarà parallela all'asse y e per questo motivo non ho potuto determinarne il coefficiente angolare:

$$\boldsymbol{x = -1}$$

B. Anche in questo caso, conoscendo già il centro e il raggio della circonferenza, pongo la distanza del centro dalla retta del fascio uguale al raggio per determinare il parametro:

$$\frac{|\,k - 4k\,|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 2 \qquad (3k)^2 = 4\,(k^2 + 1) \qquad 9k^2 = 4k^2 + 4 \qquad \boldsymbol{k = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}}$$

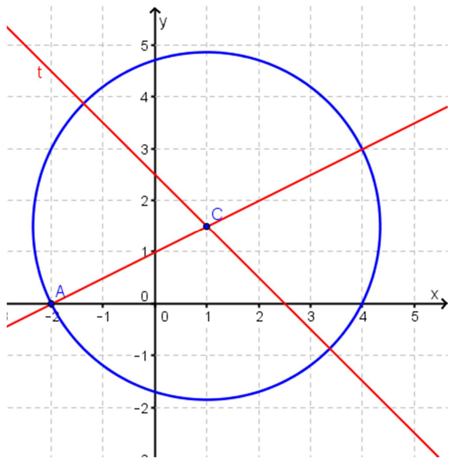
C. Conoscendo l'ascissa, determino l'ordinata del punto, sostituendo l'ascissa nell'equazione della circonferenza:

$$1 + y^2 - 2 - 3 = 0 \qquad y = \pm 2$$

Il punto si deve trovare nel primo quadrante, perciò avrà coordinate: $P\,(1; 2)$. Applico la formula di sdoppiamento:

$$x + 2y - 2\frac{x + 1}{2} - 3 = 0 \qquad \boldsymbol{y = 2}$$

2. Determina l'equazione della circonferenza avente come centro il punto di intersezione delle rette s e t, rispettivamente di equazione $x-2y+2=0$ e $2x+2y-5=0$ e avente in comune con s un punto dell'asse x. Rappresenta tutti gli oggetti, le rette e la circonferenza, nel piano cartesiano.



Innanzi tutto, determino il centro della circonferenza mettendo a sistema le equazioni delle due rette:

$$\begin{cases} x-2y+2=0 \\ 2x+2y-5=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$$3x-3=0$$

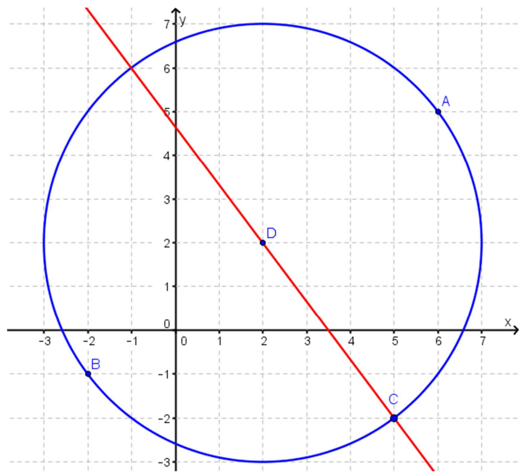
Per determinare il punto della circonferenza, metto a sistema l'equazione della prima retta con l'equazione dell'asse x:

$$\begin{cases} x-2y+2=0 \\ y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases}$$

Applicando la definizione di circonferenza, posso determinarne l'equazione:

$$(x-1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=3^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2 \qquad \boldsymbol{x^2+y^2-2x-3y-8=0}$$

3. Scrivi l'equazione della circonferenza di diametro $A\ (6;5)$ e $B\ (-2;-1)$. Determina poi il vertice C, posto nel quarto quadrante, del triangolo rettangolo isoscele ABC iscritto nella circonferenza.



Determino il centro D della circonferenza come punto medio del segmento AB:

$$D\left(\frac{6-2}{2};\frac{5-1}{2}\right)=(2;2)$$

Applicando la definizione di circonferenza, posso determinarne l'equazione:

$$(x-2)^2+(y-2)^2=4^2+3^2 \qquad \boldsymbol{x^2+y^2-4x-4y-17=0}$$

Il terzo vertice del triangolo, C, si troverà sull'asse del segmento AB e posso determinarlo intersecando l'asse con la circonferenza:

$$\begin{cases} x^2+y^2-4x-4y-17=0 \\ (x-6)^2+(y-5)^2=(x+2)^2+(y+1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2-4x-4y-17=0 \\ -12x+36-10y+25=4x+4+2y+1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+y^2-4x-4y-17=0 \\ 4x+3y-14=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2-4x-4y-17=0 \\ y=-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{14}{3} \end{cases} \qquad x^2+\frac{16}{9}x^2+\frac{196}{9}-\frac{112}{9}x-4x+\frac{16}{3}x-\frac{56}{3}-17=0$$

$$25\,x^2-100x-125=0 \qquad x^2-4x-5=0 \qquad (x-5)(x+1)=0$$

Dato che il punto deve trovarsi nel quarto quadrante, avrà coordinate: $\boldsymbol{C\ (5;\ -2)}$