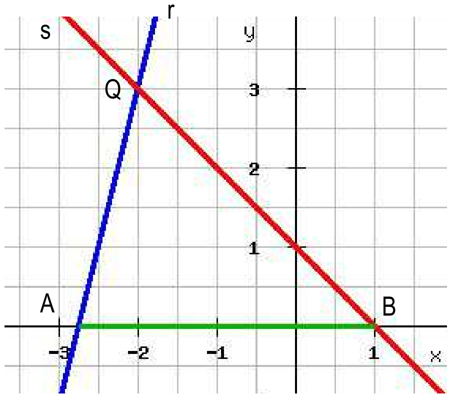
1. Fra le rette passanti per il punto $Q\ (-2; 3)$, individua e rappresenta:
   a. l'equazione della retta r parallela alla retta che congiunge i punti $(2; 3)$ e $(1; -1)$;
   b. l'equazione della retta s perpendicolare alla bisettrice di primo e terzo quadrante;
   c. determina inoltre l'area del triangolo individuato dalle rette r, s e dall'asse x.




A. Determino innanzi tutto il coefficiente angolare della retta passante per i due punti dati. La retta parallela passante per Q avrà lo stesso coefficiente angolare:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-3}{1-2} = 4$$

$$y - y_Q = m(x - x_Q) \qquad r\colon\ \boldsymbol{y = 4x + 11}$$

B. La bisettrice di primo e terzo quadrante ha coefficiente angolare 1, perciò la perpendicolare ha coefficiente angolare – 1:

$$s\colon\ \boldsymbol{y = -x + 1}$$

C. Per determinare l'area del triangolo, calcolo innanzi tutto i punti di intersezione tra le rette r e s e l'asse x, ovvero i punti A e B. Poi calcolo la lunghezza del segmento AB, la base, mentre l'altezza sarà data dall'ordinata del punto Q. Con questi dati posso calcolare l'area.

$$\begin{cases} y = 4x + 11 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\dfrac{11}{4} \\ y = 0 \end{cases} \qquad A\left(-\frac{11}{4}; 0\right)$$

$$\begin{cases} y = -x + 1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad B(1; 0)$$

$$\overline{AB} = \left|1 + \frac{11}{4}\right| = \frac{15}{4} \qquad A = \frac{15}{4}\cdot 3\cdot\frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{45}{8}}$$

2. Calcola il perimetro del triangolo isoscele che ha la base di estremi $B\ (6;\ -4)$ e $C\ (8;\ -2)$ e il terzo vertice di ordinata nulla.

Determino innanzi tutto l'asse del segmento BC e poi lo metto a sistema con l'asse x, per determinare il terzo vertice:

$$(x-6)^2 + (y+4)^2 = (x-8)^2 + (y+2)^2$$

$$-12x + 36 + 8y + 16 = -16x + 64 + 4y + 4$$

$$x + y - 4 = 0$$

$$\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases} \qquad A\ (4; 0)$$

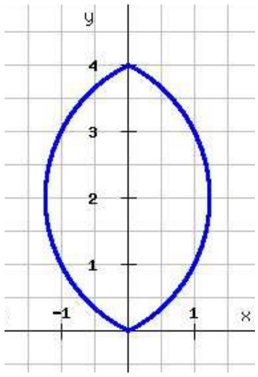
Per determinare il perimetro, calcolo le lunghezze dei lati AB e BC:

$$\overline{AB} = \overline{AC} = \sqrt{(6-4)^2 + (-4-0)^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(8-6)^2 + (-2+4)^2} = 2\sqrt{2}$$

Possiamo quindi determinare il perimetro: $2p = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{2} = \boldsymbol{4\sqrt{5} + 2\sqrt{2}}$

3. Rappresenta graficamente la curva descritta dalla seguente equazione: $x^2+y^2-2|x|-4y=0$.




La curva è data dall'unione di due circonferenze:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2+y^2-2x-4y=0 \end{cases} \qquad C_1\ (1;2)$$

$$\begin{cases} x < 0 \\ x^2+y^2+2x-4y=0 \end{cases} \qquad C_2\ (-1;2)$$

Non ho bisogno di determinare il raggio, perché entrambe le circonferenze passano per l'origine.

4. Scrivi le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza di equazione $x^2+y^2-2x-2y-23=0$ condotte dal punto P (8; 0).

Considero l'equazione del fascio proprio di rette centrato in P. Dopo aver determinato centro e raggio della circonferenza data, pongo la distanza del centro dalla generica retta del fascio uguale al raggio: in questo modo, posso determinare il coefficiente angolare delle rette tangenti:

$$t:\ y=m(x-8)$$

$$C\ (1;1) \qquad r=\sqrt{1+1+23}=5$$

$$d(C;t)=r \qquad \frac{|m-1-8m|}{\sqrt{m^2+1}}=5 \qquad 1+7m=\pm 5\sqrt{m^2+1}$$

$$1+14m+49\,m^2=25\,m^2+25 \qquad 12\,m^2+7m-12=0$$

$$m_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{49+576}}{24}=\frac{-7\pm 25}{24}=\left\langle \begin{matrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{4}{3} \end{matrix}\right.$$

Perciò le due tangenti hanno equazione:

$$\boldsymbol{y=\frac{3}{4}x-6} \qquad \boldsymbol{y=-\frac{4}{3}x+\frac{32}{3}}$$

5. Scrivi e rappresenta nel piano cartesiano le equazioni della circonferenza di centro $\mathrm{C}\ (3;\ -1)$, passante per $\mathrm{P}\ (5;5)$ e della sua tangente in P.

Determino innanzi tutto l'equazione della circonferenza di centro C e passante per P. Per determinare l'equazione della tangente, invece, uso la formula di sdoppiamento:

$$(x-3)^2+(y+1)^2=(3-5)^2+(-1-5)^2$$

$$x^2+y^2-6x+2y-30=0$$

$$t: xx_P+yy_P-6\frac{x+x_P}{2}+2\frac{y+y_P}{2}-30=0$$

$$t: 5x+5y-3\,(x+5)+y+5-30=0 \qquad \boldsymbol{x+3y-20=0}$$

6. Determina l'equazione della circonferenza avente per diametro il segmento di estremi $(-4;2)$ e $(-2;6)$.

Innanzi tutto determino il centro della circonferenza (punto medio tra gli estremi del diametro) e poi determino l'equazione della circonferenza di centro noto e passante per uno dei due punti dati:

$$C \equiv M_{AB}\ (-3;\ 4)$$

$$(x+3)^2+(y-4)^2=(-3+4)^2+(4-2)^2$$

$$\boldsymbol{x^2+y^2+6x-8y+20=0}$$

7. Determina l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo di vertici $(0;2)$, $(2;6)$ e $(6;2)$.

Determino gli assi di due delle corde individuate dai tre punti. Dal loro punto di intersezione, otterrò il centro della circonferenza e, quindi, l'equazione della circonferenza:

$$a_1: x=3 \qquad a_2: (x-0)^2+(y-2)^2=(x-2)^2+(y-6)^2$$

$$a_2:\ x+2y-9=0$$

$$\begin{cases} x=3 \\ x+2y-9=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases}$$

$$(x-3)^2+(y-3)^2=(3-0)^2+(3-2)^2$$

$$\boldsymbol{x^2+y^2-6x-6y+8=0}$$

8. Determina l'equazione della circonferenza con centro $\mathrm{C}\ (3;\ -1)$ e tangente all'asse delle y.

Calcolo il raggio della circonferenza, come distanza del centro dall'asse delle y, che corrisponde al valore assoluto dell'ascissa di C:

$$(x-3)^2+(y+1)^2=3^2$$

$$\boldsymbol{x^2+y^2-6x+2y+1=0}$$