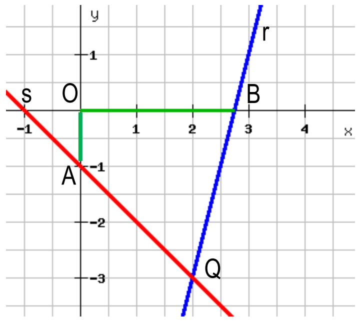
1. Fra le rette passanti per il punto $Q\ (2; -3)$, individua e rappresenta:
   a. l'equazione della retta r parallela alla retta che congiunge i punti $(-2; 3)$ e $(-3; -1)$;
   b. l'equazione della retta s perpendicolare alla bisettrice di primo e terzo quadrante;
   c. determina inoltre il perimetro del quadrilatero individuato dalle rette r, s, dall'asse x e dall'asse y.



A. Determino innanzi tutto il coefficiente angolare della retta passante per i due punti dati. La retta parallela passante per Q avrà lo stesso coefficiente angolare:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-3}{-3+2} = 4$$

$$y - y_Q = m(x - x_Q) \qquad r\colon\ \boldsymbol{y = 4x - 11}$$

B. La bisettrice di primo e terzo quadrante ha coefficiente angolare 1, perciò la perpendicolare ha coefficiente angolare – 1:

$$s\colon\ \boldsymbol{y = -x - 1}$$

C. Per determinare il perimetro del quadrilatero AQBO, calcolo innanzi tutto i punti di intersezione tra la retta r e l'asse x, ovvero il punto B e tra la retta s e l'asse y, ovvero il punto A. Poi calcolo la lunghezza del segmento OB – che corrisponde all'ascissa di B – la lunghezza del segmento OA – che corrisponde all'ordinata di A in valore assoluto – la lunghezza dei segmenti AQ e BQ. Con questi dati posso calcolare il perimetro.

$$\begin{cases} y = 4x - 11 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{11}{4} \\ y = 0 \end{cases} \qquad B\left(\frac{11}{4}; 0\right)$$

$$\begin{cases} y = -x - 1 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \qquad A(0; -1)$$

$$\overline{OB} = \frac{11}{4};\ \overline{OA} = 1;\ \ \overline{AQ} = \sqrt{(2-0)^2 + (-3+1)^2} = 2\sqrt{2};\ \ \overline{QB} = \sqrt{\left(2 - \frac{11}{4}\right)^2 + (-3-0)^2} = \frac{3}{4}\sqrt{17}$$

$$2p = \frac{11}{4} + 1 + 2\sqrt{2} + \frac{3}{2}\sqrt{2} = \boldsymbol{\frac{15}{4} + 2\sqrt{2} + \frac{3}{4}\sqrt{17}}$$

2. Calcola l'area del triangolo isoscele che ha la base di estremi $B\ (2;\ -2)$ e $C\ (4; 0)$ e il terzo vertice di ascissa nulla.

Determino innanzi tutto l'asse del segmento BC e poi lo metto a sistema con l'asse y, per determinare il terzo vertice:

$$(x-2)^2 + (y+2)^2 = (x-4)^2 + (y-0)^2$$

$$-4x + 4 + 4y + 4 = -8x + 16$$

$$x + y - 2 = 0$$

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \qquad A\ (0; 2)$$

Per determinare l'area, calcolo la lunghezza della base BC e poi, determinato il punto medio M di BC, calcolo la misura dell'altezza AM:

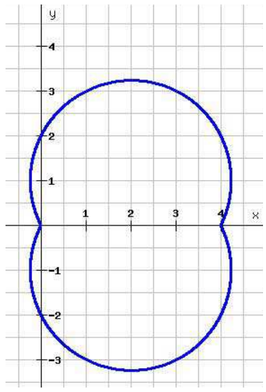
$$\overline{BC} = \sqrt{(2-4)^2 + (-2-0)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$M\left(\frac{2+4}{2}; \frac{-2+0}{2}\right) = (3; -1)$$

$$\overline{AM} = \sqrt{(0-3)^2 + (2+1)^2} = 3\sqrt{2}$$

Possiamo quindi determinare l'area: $A = 2\sqrt{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = \boldsymbol{6}$

3. Rappresenta graficamente la curva descritta dalla seguente equazione: $x^2+y^2-4\,x-2|\,y\,|=0$.



La curva è data dall'unione di due circonferenze:

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ x^2+y^2-4x-2y=0 \end{cases} \qquad C_1\ (2;1)$$

$$\begin{cases} y < 0 \\ x^2+y^2-4x+2y=0 \end{cases} \qquad C_2\ (2;-1)$$

Non ho bisogno di determinare il raggio, perché entrambe le circonferenze passano per l'origine.

4. Scrivi le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza di equazione $x^2+y^2+2x-2y-23=0$ condotte dal punto P (4; 0).

Considero l'equazione del fascio proprio di rette centrato in P. Dopo aver determinato centro e raggio della circonferenza data, pongo la distanza del centro dalla generica retta del fascio uguale al raggio: in questo modo, posso determinare il coefficiente angolare delle rette tangenti:

$$t:\ y=m\,(x-4)$$

$$C\,(-1;1) \qquad r=\sqrt{1+1+23}=5$$

$$d(C;t)=r \qquad \frac{|-m-1-4m\,|}{\sqrt{m^2+1}}=5 \qquad 1+5m=\pm 5\sqrt{m^2+1}$$

$$1-10m+\ 25\,m^2=25\,m^2+25 \qquad 10m+24=0 \qquad m=-\frac{12}{5}$$

L'altra tangente è parallela all'asse y. Perciò le due tangenti hanno equazione:

$$\boldsymbol{y=-\frac{12}{5}x+\frac{48}{5}} \qquad \boldsymbol{x=4}$$

5. Scrivi e rappresenta nel piano cartesiano le equazioni della circonferenza di centro $C\ (2;\ -1)$, passante per $P\ (5;-5)$ e della sua tangente in P.

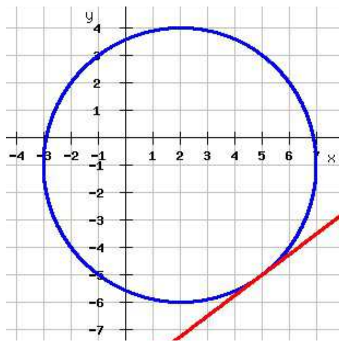
Determino innanzi tutto l'equazione della circonferenza di centro C e passante per P. Per determinare l'equazione della tangente, invece, uso la formula di sdoppiamento:

$$(x-2)^2+(y+1)^2=(2-5)^2+(-1+5)^2$$

$$x^2+y^2-4x+2y-20=0$$

$$t: xx_P+yy_P-4\frac{x+x_P}{2}+2\frac{y+y_P}{2}-20=0$$

$$t: 5x-5y-2\,(x+5)+y-5-20=0 \qquad \boldsymbol{3x-4y-35=0}$$



6. Determina l'equazione della circonferenza avente per diametro il segmento di estremi $(-3; 0)$ e $(-3; 6)$.

Innanzi tutto determino il centro della circonferenza (punto medio tra gli estremi del diametro) e poi determino l'equazione della circonferenza di centro noto e passante per uno dei due punti dati:

$$C \equiv M_{AB}\,(-3;\ 3)$$

$$(x+3)^2 + (y-3)^2 = (3-0)^2$$

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 + 6x - 6y + 9 = 0}$$

7. Determina l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo di vertici $(4; -3)$, $(5; -2)$ e $(-2; 5)$.

Determino gli assi di due delle corde individuate dai tre punti. Dal loro punto di intersezione, otterrò il centro della circonferenza e, quindi, l'equazione della circonferenza:

$$a_1: (x-4)^2 + (y+3)^2 = (x-5)^2 + (y+2)^2$$

$$a_1: -8x + 16 + 6y + 9 = -10x + 25 + 4y + 4$$

$$a_1: x + y - 2 = 0$$

$$a_2: (x-4)^2 + (y+3)^2 = (x+2)^2 + (y-5)^2$$

$$a_1: -8x + 16 + 6y + 9 = 4x + 4 - 10y + 25$$

$$a_1: 3x - 4y + 1 = 0$$

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 3x - 4y + 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x + 4y - 8 = 0 \\ 3x - 4y + 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 7x - 7 = 0 \\ 3x - 4y + 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = (4-1)^2 + (-3-1)^2$$

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0}$$

8. Determina l'equazione della circonferenza con centro $C\ (3;\ -2)$ e tangente alla retta $y = 3$. Determina inoltre la tangente alla circonferenza nel suo punto di ascissa 6 posto nel primo quadrante.

Calcolo il raggio della circonferenza, come distanza del centro dalla retta data: $\frac{|-2-3\,|}{\sqrt{1}} = 5$

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 5^2$$

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0}$$

Determino il punto del primo quadrante di ascissa 6, sostituendo 6 alla x nell'equazione della circonferenza:

$$36 + y^2 - 36 + 4y - 12 = 0 \qquad y^2 + 4y - 12 = 0 \qquad y_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{1} = \left\langle \begin{matrix} 2 \\ -6 \end{matrix} \right.$$

Il punto, essendo nel primo quadrante, ha coordinate (6; 2). Applico la formula di sdoppiamento:

$$t: xx_P + yy_P - 6\frac{x + x_P}{2} + 4\frac{y + y_P}{2} - 12 = 0$$

$$t: 6x + 2y - 3\,(x+6) + 2\,(y+2) - 12 = 0 \qquad \boldsymbol{3x + 4y - 26 = 0}$$