Individua e classifica i punti di discontinuità o di singolarità delle seguenti funzioni:

1. $y = \frac{1}{2^{\frac{1}{x}}-2}$

Determiniamo innanzi tutto il dominio ponendo il denominatore diverso da zero:

$$\begin{cases} 2^{\frac{1}{x}} - 2 \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2^{\frac{1}{x}} \neq 2 \\ x \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1}{x} \neq 1 \\ x \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 0 \end{cases} \qquad D = (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$$

Calcolo i limiti, destro e sinistro, nei punti 0 e 1 per classificare i punti di singolarità:

$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2^{\frac{1}{x}}-2} = 0$ $\qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{2^{\frac{1}{x}}-2} = -\frac{1}{2}$ $\qquad \boldsymbol{x = 0}$ punto di singolarità di **I specie**

$\lim_{x\to 1^\pm} \frac{1}{2^{\frac{1}{x}}-2} = \mp\infty$ $\qquad \boldsymbol{x = 1}$ punto di singolarità di **II specie**

2. $y = \frac{\tan x}{\sin x}$

Determiniamo innanzi tutto il dominio:

$$y = \frac{\tan x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\cos x} \qquad \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \qquad D = \mathbb{R} - \left\{k\frac{\pi}{2}\right\}$$

Calcolo i limiti, destro e sinistro, nei punti 0 e $\frac{\pi}{2}$: per la periodicità, negli altri infiniti punti si comporterà allo stesso modo:

$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{1}{\cos x} = 1$ $\qquad \boldsymbol{x = 0}$ punto di singolarità **eliminabile**

$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^\pm} \frac{1}{\cos x} = \mp\infty$ $\qquad \boldsymbol{x = \frac{\pi}{2}}$ punto di singolarità di **II specie**

Determina le equazioni degli eventuali asintoti orizzontali, verticali e obliqui delle seguenti funzioni.

3. $y = \frac{x^3-1}{x^2+1}$

Si tratta di una funzione razionale fratta e il denominatore, essendo una somma di quadrati, è sempre diverso da zero, perciò $D = \mathbb{R}$. Non ci sono, quindi, asintoti verticali. Procediamo con gli asintoti orizzontali:

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3-1}{x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty$ Non ci sono asintoti orizzontali, ma potrebbero esserci asintoti obliqui:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3-1}{x(x^2+1)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1 \qquad q = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3-1}{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3-1-x^3-x}{x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x}{x^2} = 0$$

L'asintoto obliquo ha equazione $\boldsymbol{y = x}$.

4. $y = 2^{\frac{2x+1}{x-1}}$

Determino il dominio, dato dal denominatore dell'esponente diverso da zero: $D = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

Determiniamo gli eventuali asintoti verticali: $\lim_{x\to 1^-} 2^{\frac{2x+1}{x-1}} = 0$ $\qquad \lim_{x\to 1^+} 2^{\frac{2x+1}{x-1}} = +\infty$ $\qquad \boldsymbol{x = 1}$ è un asintoto verticale.

Determiniamo gli eventuali asintoti orizzontali: $\lim_{x\to\pm\infty} 2^{\frac{2x+1}{x-1}} = 2^2 = 4$ $\qquad \boldsymbol{y = 4}$ è un asintoto orizzontale.

Individua e classifica i punti di discontinuità o di singolarità delle seguenti funzioni:

1. $y = \frac{1}{9 - 3^{\frac{2}{x}}}$

Determiniamo innanzi tutto il dominio ponendo il denominatore diverso da zero:

$$\begin{cases} 9 - 3^{\frac{2}{x}} \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3^{\frac{2}{x}} \neq 9 \\ x \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{2}{x} \neq 2 \\ x \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 0 \end{cases} \qquad D = (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$$

Calcolo i limiti, destro e sinistro, nei punti 0 e 1 per classificare i punti di singolarità:

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{9 - 3^{\frac{2}{x}}} = 0 \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{9 - 3^{\frac{2}{x}}} = \frac{1}{9}$ $\qquad$ $\boldsymbol{x = 0}$ punto di singolarità di **I specie**

$\lim_{x \to 1^\pm} \frac{1}{9 - 3^{\frac{2}{x}}} = \pm\infty$ $\qquad$ $\boldsymbol{x = 1}$ punto di singolarità di **II specie**

2. $y = \frac{\sin x}{\sin 2x}$

Determiniamo innanzi tutto il dominio:

$$y = \frac{\sin x}{\sin 2x} = \frac{\sin x}{2 \sin x \cos x} = \frac{1}{2 \cos x} \qquad \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \qquad D = \mathbb{R} - \left\{k\frac{\pi}{2}\right\}$$

Calcolo i limiti, destro e sinistro, nei punti 0 e $\frac{\pi}{2}$: per la periodicità, negli altri infiniti punti si comporterà allo stesso modo:

$\lim_{x \to 0^\pm} \frac{1}{2 \cos x} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\boldsymbol{x = 0}$ punto di singolarità **eliminabile**

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^\pm} \frac{1}{2 \cos x} = \mp\infty$ $\qquad$ $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2}}$ punto di singolarità di **II specie**

Determina le equazioni degli eventuali asintoti orizzontali, verticali e obliqui delle seguenti funzioni.

3. $y = \frac{1 - x^3}{x^2 + 1}$

Si tratta di una funzione razionale fratta e il denominatore, essendo una somma di quadrati, è sempre diverso da zero, perciò $D = \mathbb{R}$. Non ci sono, quindi, asintoti verticali. Procediamo con gli asintoti orizzontali:

$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 - x^3}{x^2 + 1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-x^3}{x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} -x = \mp\infty$ $\qquad$ Non ci sono asintoti orizzontali, ma potrebbero esserci asintoti obliqui:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 - x^3}{x(x^2 + 1)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-x^3}{x^3} = -1 \qquad q = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{1 - x^3}{x^2 + 1} + x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 - x^3 + x^3 + x}{x^2 + 1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x^2} = 0$$

L'asintoto obliquo ha equazione $\boldsymbol{y = -x}$.

4. $y = 2^{\frac{2x+3}{x-2}}$

Determino il dominio, dato dal denominatore dell'esponente diverso da zero: $D = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

Determiniamo gli eventuali asintoti verticali: $\lim_{x \to 2^-} 2^{\frac{2x+3}{x-2}} = 0 \qquad \lim_{x \to 2^+} 2^{\frac{2x+3}{x-2}} = +\infty$ $\qquad$ $\boldsymbol{x = 2}$ è un asintoto verticale.

Determiniamo gli eventuali asintoti orizzontali: $\lim_{x \to \pm\infty} 2^{\frac{2x+3}{x-2}} = 2^2 = 4$ $\qquad$ $\boldsymbol{y = 4}$ è un asintoto orizzontale.