1. Determina le coordinate del vertice della parabola: $y = 5x^2 - 10x + 3$

L'equazione generica della parabola è: $y = ax^2 + bx + c$ e le sue generiche coordinate del vertice sono $V\left(-\frac{b}{2a};\ -\frac{\Delta}{4a}\right)$. Possiamo ricavare l'ascissa e poi sostituire il suo valore nell'equazione della parabola per determinarne l'ordinata:

$$x_V = \frac{10}{10} = 1 \qquad y_V = 5 - 10 + 3 = -2 \qquad \boldsymbol{V(1;\ -2)}$$

2. Senza risolvere l'equazione $x^2\sqrt{6} - 2x\sqrt{2} - \sqrt{3} = 0$, calcola la somma e il prodotto delle sue radici, specificando se le radici sono reali.

Calcolo innanzi tutto il discriminante per stabilire se le radici sono reali:

$$\frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = \left(\sqrt{2}\right)^2 + \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = 2 + 3\sqrt{2} > 0 \qquad \boldsymbol{sol. reali}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}}{3}} \qquad x_1x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \boldsymbol{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

3. Data la coppia di valori $x_1 = 7$ e $x_2 = 5$, scrivi l'equazione di secondo grado in forma normale che ha tali valori come radici.

$$x_1 + x_2 = 12 \qquad x_1x_2 = 35$$

Sapendo che la generica equazione di secondo grado può essere scritta come: $x^2 - Sx + P = 0$, otteniamo:

$$\boldsymbol{x^2 - 12x + 35 = 0}$$

4. Determina, se possibile, due numeri reali, sapendo che hanno somma $3\sqrt{3} + 2$ e prodotto $3 + 5\sqrt{3}$.

Sapendo che la generica equazione di secondo grado può essere scritta come: $x^2 - Sx + P = 0$, otteniamo:

$$x^2 - \left(3\sqrt{3} + 2\right) x + 3 + 5\sqrt{3} = 0$$

Risolvo l'equazione:

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(3\sqrt{3} + 2\right)^2 - 4\left(3 + 5\sqrt{3}\right) = 27 + 4 + 12\sqrt{3} - 12 - 20\sqrt{3} = 16 + 3 - 8\sqrt{3} = \left(4 - \sqrt{3}\right)^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3\sqrt{3} + 2 \pm \left(4 - \sqrt{3}\right)}{2} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{2\sqrt{3} + 6}{2} = \sqrt{3} + 3 \\ \frac{4\sqrt{3} - 2}{2} = 2\sqrt{3} - 1 \end{array} \right.$$