EQUAZIONI DI MAXWELL

Il fisico scozzese James Clerk Maxwell (1831-1879) cercò di individuare le equazioni fondamentali per descrivere completamente tutti i fenomeni elettromagnetici. In altre parole, egli cercava per i campi elettrici e magnetici qualcosa di analogo alle leggi di Newton per la meccanica. Le leggi di Gauss per il campo elettrico e per il campo magnetico, quella di Ampère e quella di Faraday costituivano un insieme di equazioni che permettevano di affrontare un gran numero di situazioni riguardanti i campi elettrici e magnetici. Per questo motivo Maxwell le analizzò, per verificare se erano sufficienti a descrivere e risolvere qualsiasi problema che riguardasse i campi elettrici e magnetici. Ricordiamo queste quattro equazioni:

Legge di Gauss per il campo elettrico $$\Phi\,(\vec{E}) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Legge di Gauss per il campo magnetico $$\Phi\,(\vec{B}) = 0$$

Legge di Faraday-Neumann $$\Gamma\,(\vec{E}) = -\frac{\Delta\Phi\,(\vec{B})}{\Delta t}$$

Legge di Ampère $$\Gamma\,(\vec{B}) = \mu_0\, i + \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\Delta\,\Phi\,(\vec{E})}{\Delta\, t}$$

Una delle conseguenze della formulazione di Maxwell è la produzione di onde elettromagnetiche quando abbiamo campi elettrici o magnetici che variano rapidamente nel tempo. Nel 1886 Heinrich Rudolph Hertz (1857-1894) riuscì a eseguire un esperimento che evidenziò la presenza di tali onde.

LEGGE DI GAUSS PER IL CAMPO ELETTRICO

Consideriamo un campo elettrico uniforme, E, che attraversa una superficie di area A perpendicolare a esso. Immaginando le linee del campo elettrico con le loro frecce, possiamo facilmente immaginare un “flusso” del campo elettrico attraverso la superficie. Sebbene, naturalmente, non ci sia alcun flusso reale, questa analogia è particolarmente utile. Possiamo quindi definire, facendo riferimento a questa analogia, il flusso del campo elettrico come:

$$\Phi = \vec{E}\cdot\vec{A}$$

Il prodotto tra il campo elettrico e la superficie è un prodotto scalare e il vettore $\vec{A}$ ha modulo pari alla superficie, direzione normale (ovvero perpendicolare alla tangente) alla superficie e verso uscente dalla superficie stessa. In altre parole, $\Phi = E\ A\cos\vartheta$, dove θ è l’angolo formato dalle linee del campo elettrico con il vettore superficie.

Per ricavare molto semplicemente il teorema di Gauss, possiamo considerare una carica puntiforme q e una superficie sferica di raggio r centrata su questa carica. In tal caso, le linee del campo e il vettore superficie sono sempre paralleli e con lo stesso verso, perciò θ = 0. Applicando quindi la definizione:

$$\Phi = E\ A\cos\vartheta = \left(k\,\frac{q}{r^2}\right)(4\,\pi\,r^2)\cdot 1 = 4\pi k\ q = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

dove $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{4\,\pi\,k} = 8{,}85\cdot 10^{-12}\ C^2\ /\ N\cdot m^2$ è la costante dielettrica del vuoto.

Possiamo quindi concludere, generalizzando il risultato ottenuto nel semplice caso della sfera e della carica puntiforme: per una carica q contenuta all’interno di una superficie arbitraria, il flusso del campo elettrico attraverso questa superficie è:

$$\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

LEGGE DI GAUSS PER IL CAMPO MAGNETICO

Come per il campo elettrico, il flusso del campo magnetico rappresenta una misura del numero di linee del campo magnetico che attraversano una data superficie. Il flusso del campo magnetico è dato da:

$$\Phi = B\ A \cos \vartheta$$

L'unità di misura del flusso magnetico è il weber (Wb) dal fisico tedesco Wilhelm Eduard Weber (1804-1891), definito come $T \cdot m^2$.

Il flusso del campo magnetico, a differenza di quello del campo elettrico, attraverso una superficie chiusa:

$$\Phi = 0$$

Incontriamo qui una prima differenza tra campo elettrico e campo magnetico. Mentre il flusso del campo elettrico è proporzionale alla quantità di carica racchiusa nella superficie, il flusso del campo magnetico è sempre uguale a zero. Ciò riflette una profonda differenza tra le sorgenti del campo elettrico e quelle del campo magnetico: mentre vi sono cariche elettriche positive e cariche elettriche negative, non esiste un analogo magnetico. Infatti, non vi sono poli magnetici liberi. Se, per ipotesi, esistessero dei poli Nord isolati, il flusso magnetico attraverso una superficie che li racchiude sarebbe diverso da zero. Ma per quanto si sia cercato, poli magnetici isolati non sono mai stati osservati. La presenza, insieme a un certo numero di poli Nord, di un eguale numero di poli Sud rende il flusso totale nullo, come accade per il flusso elettrico di cariche uguali e di segno opposto.

Prima di parlare della circuitazione del campo magnetico e del campo elettrico, è importante sottolineare che, per definizione, la circuitazione è data dalla formula:

$$\Gamma\ (\vec{z}\,) = \sum_i \vec{z}_i \cdot \Delta \vec{l}_i$$

Ovvero, scomponendo la linea chiusa in tanti piccoli segmenti rettilinei di lunghezza $\Delta \vec{l}_i$, ne facciamo il prodotto scalare con il vettore del campo (nel nostro caso campo magnetico o campo elettrico), e calcoliamo poi la somma dei prodotti calcolati per tutti i segmenti in cui abbiamo suddiviso il percorso chiuso.

LEGGE DI FARADAY-NEUMANN

Per generare una corrente elettrica non è necessario avere a disposizione una pila o una batteria: si può riuscire anche con una semplice calamita. Colleghiamo gli estremi di una bobina a un amperometro molto sensibile. Poiché in questo circuito non è inserito alcun generatore di tensione, non passa corrente e l'indice dello strumento segna "zero". Se però avviciniamo alla bobina un polo di una calamita, la lancetta dell'amperometro devia, segnalando che nel circuito passa una corrente. Quando la calamita si ferma, l'indice torna di nuovo sullo zero e vi rimane fintanto che essa non si muove. Se poi allontaniamo la calamita dalla bobina, la lancetta si sposta di nuovo, ma dall'altra parte dello zero. Ciò significa che, mentre la calamita si allontana, la corrente circola in senso contrario rispetto a quando essa si avvicina.

Siamo quindi riusciti a creare una corrente nel circuito senza usare pile, batterie o altri dispositivi simili. Alle correnti così generate si dà il nome di correnti indotte e il fenomeno si chiama induzione elettromagnetica.

La corrente indotta non dipende solo dalla presenza di un campo magnetico variabile, ma anche dalla superficie con cui il circuito intercetta le linee di campo. Per esprimere in termini quantitativi questa "capacità di intercettazione" del campo magnetico è utile fare ricorso al flusso di campo magnetico e possiamo quindi dire che si ha una corrente indotta quando il flusso magnetico che attraversa la superficie del circuito varia nel tempo. Questo è espresso dalla legge di Faraday-Neumann:

$$\Gamma\ (\vec{E}\,) = -\frac{\Delta \Phi\ (\vec{B}\,)}{\Delta t}$$

Ovvero: la circuitazione del campo elettrico lungo una linea chiusa γ è uguale alla variazione del flusso del campo magnetico attraverso la superficie delimitata dalla linea γ, cambiata di segno.

Il segno "–" dato in questa relazione è spiegato dalla Legge di Lenz, in base alla quale una corrente indotta scorre sempre nel verso che si oppone alla variazione che l'ha causata.

LEGGE DI AMPÈRE

La legge di Ampère lega il campo magnetico lungo un cammino chiuso alla corrente elettrica concatenata con questo cammino. La corrente è concatenata alla linea chiusa se attraversa la superficie che la linea stessa delimita. Il segno della corrente è positivo se il campo che essa genera ha lo stesso verso della linea concatenata e negativo se il verso è opposto. La circuitazione del campo lungo un percorso chiuso che non ha alcuna corrente concatenata è nulla.

La legge di Ampère è una legge di natura, valida per tutti i campi magnetici e le correnti che sono costanti nel tempo. Per determinare la circuitazione del campo magnetico, consideriamo un filo rettilineo percorso da corrente elettrica: sappiamo che questo determina un campo magnetico che ha linee di forza che consistono in circonferenze concentriche con centro sul filo e disposte su un piano perpendicolare al filo stesso. È ragionevole scegliere un cammino circolare di raggio r (ovvero una circonferenza di lunghezza 2 π r) per racchiudere il filo. Poiché il campo magnetico è parallelo al cammino circolare in ogni punto e tutti i punti sono alla stessa distanza dal filo, e poiché un filo rettilineo percorso da una corrente i stazionaria, cioè costante nel tempo, ha intensità: $B = \dfrac{\mu_0 \, i}{2 \pi r}$, dove i è la corrente concatenata e r la distanza dal filo, otteniamo:

$$\Gamma(\vec{B}) = \sum_i \vec{B}_i \cdot \Delta \vec{l}_i = \frac{\mu_0 \, i}{2 \, \pi \, r} \cdot 2 \, \pi \, r = \mu_0 \, i$$

dove μ_0 è la costante di permeabilità magnetica nel vuoto e il suo valore è: $\mu_0 = 4 \, \pi \cdot 10^{-7} \; T \cdot m / A$.

Riprendendo le equazioni come sono state scritte fino ad ora:

Legge di Gauss per il campo elettrico	$\Phi(\vec{E}) = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$
Legge di Gauss per il campo magnetico	$\Phi(\vec{B}) = 0$
Legge di Faraday-Neumann	$\Gamma(\vec{E}) = -\dfrac{\Delta \Phi(\vec{B})}{\Delta t}$
Legge di Ampère	$\Gamma(\vec{B}) = \mu_0 \, i$

possiamo notare due asimmetrie tra i campi elettrico e magnetico: la prima è la presenza della carica Q nella legge di Gauss per il campo elettrico e l'assenza di una carica analoga nella legge di Gauss per il campo magnetico, mentre la seconda riguarda la presenza della corrente elettrica i nella legge di Ampère e l'assenza di una equivalente corrente "magnetica" nella legge di Faraday-Neumann. Questa asimmetria si spiega con il fatto che non sono stati scoperti poli magnetici isolati.

Vi è anche un'altra asimmetria tra i due campi: manca, nella legge di Ampère, un termine analogo a quello che compare al secondo membro della legge di Faraday-Neumann, cioè un termine del tipo:

$$\frac{\Delta \, \Phi(\vec{E})}{\Delta \, t}$$

Partendo da considerazioni di simmetria, James Clerk Maxwell aggiunse questo termine mancante, che gli consentì di risolvere alcune ambiguità teoriche emerse nell'ambito delle quattro equazioni. Non si tratta di una pura aggiunta formale, ma di una vera e propria scoperta, perché il termine in più consente di prevedere l'esistenza delle onde elettromagnetiche. È proprio questo riscontro sperimentale, cioè l'effettiva esistenza di un fenomeno contenuto implicitamente nelle equazioni, che provò la correttezza del lavoro teorico di Maxwell. Perciò la formulazione della legge di Ampère divenne:

$$\Gamma(\vec{B}) = \mu_0 \, i + \varepsilon_0 \, \mu_0 \, \frac{\Delta \, \Phi(\vec{E})}{\Delta \, t}$$

Nella sua fondamentale opera *Treatise on electricity and magnetism* (Trattato sull'elettricità e il magnetismo), pubblicato nel 1873, Maxwell utilizzò le equazioni come assiomi fondamentali della teoria. Per questa ragione, tali equazioni sono dette, nel loro insieme, le equazioni di Maxwell. Eccole riassunte di seguito:

CASO GENERALE	CASO STATICO
$\Phi\,(\vec{E}) = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$	$\Phi\,(\vec{E}) = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$
$\Gamma\,(\vec{E}) = -\dfrac{\Delta\Phi\,(\vec{B})}{\Delta t}$	$\Gamma\,(\vec{E}) = 0$
$\Phi\,(\vec{B}) = 0$	$\Phi\,(\vec{B}) = 0$
$\Gamma\,(\vec{B}) = \mu_0\, i + \varepsilon_0\, \mu_0\, \dfrac{\Delta\,\Phi\,(\vec{E})}{\Delta\, t}$	$\Gamma\,(\vec{B}) = \mu_0\, i$

Nel caso statico vi sono due equazioni che descrivono il comportamento del campo elettrico e altre due che regolano separatamente i fenomeni magnetici. Ma nella seconda e nella quarta equazione del caso generale compaiono invece entrambi i campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$. Ciò implica che non è più possibile studiare uno dei due campi in modo isolato, prescindendo dall'altro. Bisogna riconoscere, al contrario, che nel caso dinamico essi sono due aspetti diversi di un unico ente fisico. A tale ente si dà il nome di **campo elettromagnetico**.

BIBLIOGRAFIA

Amaldi, La fisica per i licei scientifici quarta edizione, Zanichelli – ISBN 88-08-00693-X
Walker, Fisica volume B, Zanichelli – ISBN 88-08-11698-0