

AREA DI UN TRIANGOLO NOTE LE COORDINATE DEI SUOI VERTICI

Dati tre punti di cui sono note le coordinate: $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ e $C(x_C; y_C)$, per determinare l'area del triangolo, possiamo considerare \overline{AB} come base, calcolare la distanza di C dalla base, ricavando così l'altezza \overline{CH} e poi calcolare il semiprodotto di base per altezza secondo la ben nota formula dell'area del triangolo:

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{CH}$$

Esempio:

Siano $A(2;3)$, $B(4;1)$ e $C(-5;-2)$ i vertici del triangolo ABC.

Calcolo innanzi tutto la lunghezza della base \overline{AB} : $\overline{AB} = \sqrt{(4-2)^2 + (1-3)^2} = 2\sqrt{2}$

Determino l'equazione della retta passante per i punti A e B, per poterne calcolare la distanza da C:

$$AB: \frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \Rightarrow \frac{x - 2}{4 - 2} = \frac{y - 3}{1 - 3} \Rightarrow \frac{x - 2}{2} = \frac{y - 3}{-2} \Rightarrow x + y - 5 = 0$$

Calcolo la distanza di C dalla retta passante per i punti A e B, ottenendo l'altezza CH:

$$\overline{CH} = \frac{|-5 - 2 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$$

A questo punto posso calcolare l'area del triangolo: $A_{ABC} = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{CH} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2} = 12$

Esiste un modo più semplice per calcolare l'area del triangolo, utilizzando il determinante di una matrice 2 x 2 così costruita:

$$A_{ABC} = \left| \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_C - x_A & y_C - y_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A \end{vmatrix} \right|$$

Dove il tutto è indicato in valore assoluto, in quanto l'area deve essere per forza positiva.

Per calcolare il determinante di una matrice 2 x 2 bisogna calcolare il prodotto dei termini della diagonale principale e sottrarre da questa il prodotto dei termini della diagonale secondaria:

$$\begin{vmatrix} x_C - x_A & y_C - y_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A \end{vmatrix} = (x_C - x_A)(y_B - y_A) - (y_C - y_A)(x_B - x_A)$$

E ora possiamo rifare (più velocemente) l'esempio svolto prima:

$$A_{ABC} = \left| \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} -5 - 2 & -2 - 3 \\ 4 - 2 & 1 - 3 \end{vmatrix} \right| = \left| \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} -7 & -5 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \right| = \left| \frac{1}{2} \cdot (14 + 10) \right| = 12$$

Questo ci fornisce anche la condizione di allineamento di tre punti: l'area del triangolo è nulla se e solo se i tre vertici sono allineati. In tal caso avremmo:

$$\begin{vmatrix} x_C - x_A & y_C - y_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x_C - x_A)(y_B - y_A) - (y_C - y_A)(x_B - x_A) = 0$$

$$\Rightarrow (x_C - x_A)(y_B - y_A) = (y_C - y_A)(x_B - x_A) \Rightarrow \frac{x_C - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_A}{y_B - y_A}$$

Tre punti sono allineati se si verifica la seguente uguaglianza: $\frac{x_C - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_A}{y_B - y_A}$

BIBLIOGRAFIA: