FASCI DI CIRCONFERENZE

Siano date due circonferenze $\mathscr{C}$(C; r) e $\mathscr{C}'$ (C'; r') con r > r' per convenzione. L'equazione del fascio di circonferenze è data dalla combinazione lineare delle equazioni delle due circonferenze, cioè:

$$\mathscr{C} + k\,\mathscr{C}' = 0 \qquad (1)$$

Proprietà dei fasci di circonferenze:

1. per ogni punto del piano (che non sia un punto base) passa una e una sola circonferenza del fascio;
2. nell'equazione (1), sostituendo le equazioni delle due circonferenze con altre due, qualsiasi, del fascio, otteniamo una nuova equazione dello stesso fascio. Se il fascio rappresenta circonferenze non concentriche, la sua equazione può essere data anche come combinazione lineare di una circonferenza qualsiasi con l'asse radicale;
3. l'asse radicale s (retta passante per i punti base) e l'asse centrale t (luogo geometrico dei centri delle circonferenze del fascio) sono fra loro perpendicolari.

Proprietà dell'asse radicale:

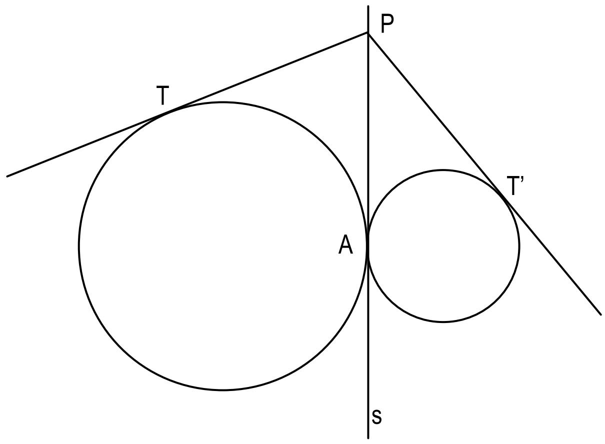
Se per ogni punto P dell'asse s si conducono i segmenti di tangente $\overline{PT}$ e $\overline{PT'}$ alle due circonferenze $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$, risulta sempre

$$\overline{PT} \cong \overline{PT'}$$

Dimostrazione:

Caso di circonferenze tangenti:

Si tratta di un'applicazione del *teorema delle tangenti*:
Se da un punto P esterno a una circonferenza si conducono le rette tangenti a essa, allora i segmenti di tangente, aventi ciascuno un estremo nel punto P e l'altro in un punto in comune con la circonferenza, sono congruenti.



Applicando il teorema alla situazione in questione:

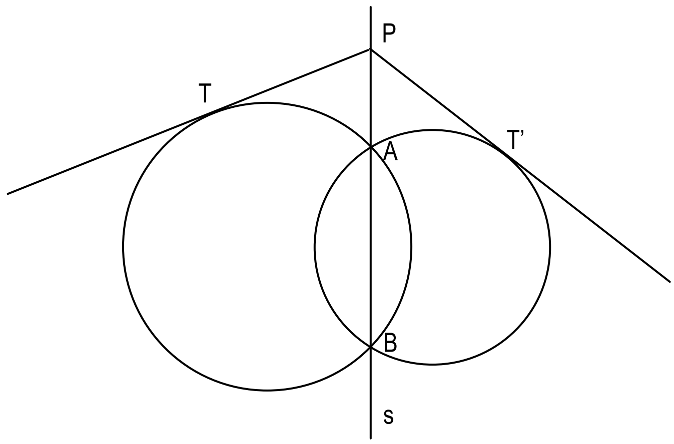
$\overline{PT} \cong \overline{PA}$ nel caso della prima circonferenza

$\overline{PT'} \cong \overline{PA}$ nel caso della seconda circonferenza

Per la proprietà transitiva: $\overline{PT} \cong \overline{PT'}$

Caso di circonferenze secanti:

Si tratta di un'applicazione del *teorema della secante e della tangente*:
Se da un punto P esterno a una circonferenza si tracciano una secante e una tangente, il segmento di tangente che ha per estremi P e il punto di contatto è medio proporzionale fra i segmenti di secante che hanno per estremi P e ciascuno dei punti di intersezione.



Applicando il teorema alla situazione in questione:
nel caso della prima circonferenza:

$$\overline{PA} : \overline{PT} = \overline{PT} : \overline{PB}$$

ovvero $\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$;

nel caso della seconda circonferenza:

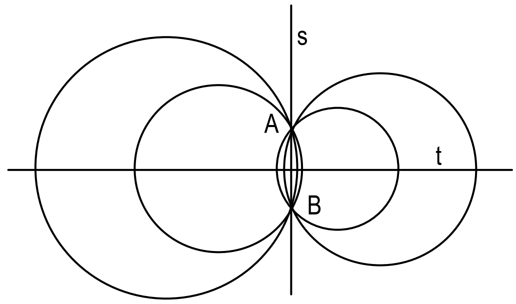
$$\overline{PA} : \overline{PT'} = \overline{PT'} : \overline{PB}$$

ovvero $\overline{PT'}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$

Perciò: $\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PT'}^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{PT}^2 = \overline{PT'}^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{PT} \cong \overline{PT'}$

PRIMO CASO: $\mathscr{C} \cap \mathscr{C}' = \{A; B\}$ – il fascio è costituito da tutte e sole le circonferenze passanti per A e B

PUNTI BASE: A e B
ASSE RADICALE: s: $\mathscr{C}' - \mathscr{C} = 0$ è la retta passante per A e B
ASSE CENTRALE: asse del segmento AB
CIRCONFERENZA DEGENERE: asse radicale s



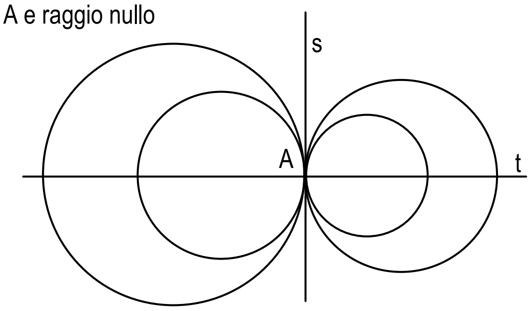
SECONDO CASO: $\mathscr{C} \cap \mathscr{C}' = \{A\}$ – il fascio è costituito da tutte e sole le circonferenze tangenti in A alla retta $\mathscr{C}' - \mathscr{C} = 0$

PUNTI BASE: A
ASSE RADICALE: s: $\mathscr{C}' - \mathscr{C} = 0$ retta tangente alla circonferenza e passante per A
ASSE CENTRALE: retta perpendicolare a s passante per A
CIRCONFERENZA DEGENERE: asse radicale s
circonferenza con centro in A e raggio nullo

Il fascio si può scrivere anche nella forma:

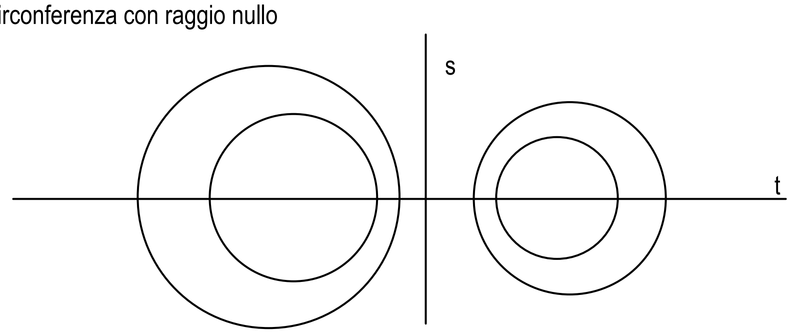
$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + k\,(a x + b y + c) = 0$$

dove $A\,(x_A\,;\,y_A)$ è punto base del fascio e
$s: a x + b y + c = 0$ l'equazione dell'asse radicale.



TERZO CASO: $\mathscr{C} \cap \mathscr{C}' = \emptyset$

PUNTI BASE:
ASSE RADICALE: s: $\mathscr{C}' - \mathscr{C} = 0$ è una retta esterna alle circonferenze
ASSE CENTRALE: retta perpendicolare a s passante per i centri
CIRCONFERENZA DEGENERE: asse radicale s
circonferenza con raggio nullo



QUARTO CASO: il fascio è costituito da tutte e sole le circonferenze concentriche a $\mathscr{C}$

PUNTI BASE:
ASSE RADICALE:
ASSE CENTRALE:
CIRCONFERENZA DEGENERE: circonferenza con centro C e raggio nullo

L'equazione generica del fascio è: $$x^2 + y^2 + a x + b y + \frac{c + k c'}{k + 1} = 0$$