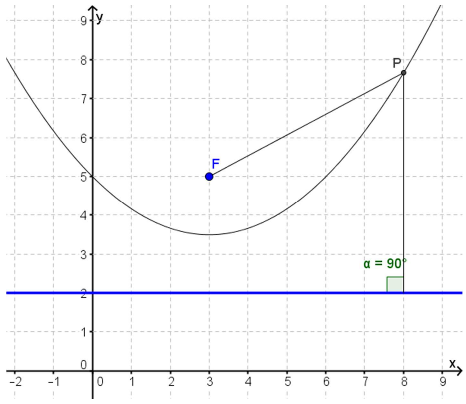
Assegnati un punto $F\ (p; q)$ detto FUOCO e una retta $y = d$ detta DIRETTRICE, si chiama parabola il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti dal fuoco e dalla direttrice:

$$\overline{PF} = d(P; y = d)$$



Considerando la proiezione di $P\ (x; y)$ sulla direttrice, otteniamo il punto H di coordinate $H\ (x; d)$, che avrà infatti la stessa ascissa di P, visto che la proiezione su una retta parallela all'asse x genera un segmento parallelo all'asse y e gli estremi di un segmento parallelo all'asse y hanno la stessa ascissa.

Perciò, la definizione di parabola diventa:

$$\overline{PF} = \overline{PH}$$

$$\sqrt{(x-p)^2 + (y-q)^2} = |\ y - d\ |$$

Elevando entrambi i membri al quadrato:

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 - 2qy + q^2 = y^2 - 2dy + d^2$$

Sommando i termini simili e isolando la y ottengo:

$$y = \frac{1}{2\ (q-d)} x^2 - \frac{p}{q-d} x + \frac{p^2 + q^2 - d^2}{2\ (q-d)}$$

Per ottenere l'equazione canonica, pongo:

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{2\ (q-d)} \\ b = -\dfrac{p}{q-d} \\ c = \dfrac{p^2 + q^2 - d^2}{2\ (q-d)} \end{cases} \qquad \boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$$

Per determinare le generiche coordinate del fuoco e la generica equazione della direttrice a partire dall'equazione canonica, risolvo il sistema precedente ricavando p, q e d in funzione di a, b e c.

$$\begin{cases} q - d = \dfrac{1}{2a} \\ b = -\dfrac{p}{\frac{1}{2a}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{p = -\dfrac{b}{2a}} \\ c = \dfrac{p^2 + q^2 - d^2}{2\ (q-d)} \end{cases}$$

Lavoriamo ora sulla terza equazione ricavando q + d:

$$c = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2a}} \left(\left(-\frac{b}{2a} \right)^2 + (q-d)(q+d) \right) = a \left(\frac{b^2}{4a^2} + \frac{1}{2a}(q+d) \right) = \frac{b^2}{4a} + \frac{1}{2}(q+d)$$

$$\frac{q+d}{2} = c - \frac{b^2}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a} \quad \Rightarrow \quad q + d = -\frac{\Delta}{2a}$$

A questo punto abbiamo il sistema:

$$\begin{cases} q - d = \dfrac{1}{2a} \\ q + d = -\dfrac{\Delta}{2a} \end{cases}$$

Sommando le due equazioni e dividendo per 2 otteniamo q, sottraendo la prima equazione dalla seconda e dividendo per 2 otteniamo d:

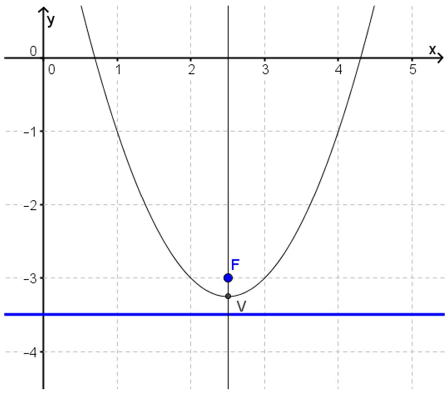
$$\begin{aligned} q - d &= \frac{1}{2a} \\ q + d &= -\frac{\Delta}{2a} \\ \hline 2q &= \frac{1-\Delta}{2a} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{q = \frac{1-\Delta}{4a}} \qquad\qquad \begin{aligned} q + d &= -\frac{\Delta}{2a} \\ q - d &= \frac{1}{2a} \\ \hline 2d &= \frac{-1-\Delta}{2a} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{d = \frac{-1-\Delta}{4a}}$$

Riassumendo: a partire dall'equazione canonica della parabola, $y = ax^2 + bx + c$ possiamo determinare le coordinate del fuoco e l'equazione della direttrice:

$$F\left(-\frac{b}{2a}; \frac{1-\Delta}{4a}\right) \qquad d: y = -\frac{1+\Delta}{4a}$$

Data la parabola $y = x^2 - 5x + 3$, calcoliamo innanzi tutto $\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 12 = 13$.

$$F\left(\frac{5}{2}; -3\right) \qquad d: y = -\frac{7}{2}$$



Possiamo determinare anche l'equazione dell'asse della parabola, passante per il fuoco e perpendicolare alla direttrice, che è anche asse di simmetria della parabola:

$$a: x = -\frac{b}{2a} \qquad x = \frac{5}{2}$$

A questo punto, possiamo determinare le coordinate generiche del vertice, che è il punto in cui la parabola interseca il suo asse:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{b}{2a} \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$$

$$y = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$$

Il vertice ha coordinate:

$$V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{5}{2}; -\frac{13}{4}\right)$$

Allo stesso modo possiamo procedere per determinare l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse x, partendo da $F\,(p; q)$ e $x = d$ come direttrice:

$$\overline{PF} = \overline{PH}$$

$$\sqrt{(x-p)^2 + (y-q)^2} = |\, x - d \,|$$

Elevando entrambi i membri al quadrato:

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 - 2qy + q^2 = x^2 - 2dx + d^2$$

Sommando i termini simili e isolando la y ottengo:

$$x = \frac{1}{2\,(p-d)} y^2 - \frac{q}{p-d} y + \frac{q^2 + p^2 - d^2}{2\,(p-d)}$$

Per ottenere l'equazione canonica, pongo:

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{2\,(p-d)} \\ b = -\dfrac{q}{p-d} \\ c = \dfrac{q^2 + p^2 - d^2}{2\,(p-d)} \end{cases} \qquad\qquad \boldsymbol{x = ay^2 + by + c}$$

Per determinare le generiche coordinate del fuoco e la generica equazione della direttrice a partire dall'equazione canonica, risolvo il sistema precedente ricavando p, q e d in funzione di a, b e c.

$$\begin{cases} p-d=\dfrac{1}{2a} \\ b=-\dfrac{q}{\frac{1}{2a}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{q=-\dfrac{b}{2a}} \\ c=\dfrac{q^2+p^2-d^2}{2\,(p-d)} \end{cases}$$

Lavoriamo ora sulla terza equazione ricavando p + d:

$$c=\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2a}}\left(\left(-\frac{b}{2a}\right)^2+(p-d)(p+d)\right)=a\left(\frac{b^2}{4a^2}+\frac{1}{2a}(p+d)\right)=\frac{b^2}{4a}+\frac{1}{2}(p+d)$$

$$\frac{p+d}{2}=c-\frac{b^2}{4a}=\frac{4ac-b^2}{4a}=-\frac{b^2-4ac}{4a}=-\frac{\Delta}{4a} \quad \Rightarrow \quad p+d=-\frac{\Delta}{2a}$$

A questo punto abbiamo il sistema:

$$\begin{cases} p-d=\dfrac{1}{2a} \\ p+d=-\dfrac{\Delta}{2a} \end{cases}$$

Sommando le due equazioni e dividendo per 2 otteniamo p, sottraendo la prima equazione dalla seconda e dividendo per 2 otteniamo d:

$$\begin{array}{r} p-d=\dfrac{1}{2a} \\ p+d=-\dfrac{\Delta}{2a} \\ \hline 2p=\dfrac{1-\Delta}{2a} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{p=\frac{1-\Delta}{4a}} \qquad\qquad \begin{array}{r} p+d=-\dfrac{\Delta}{2a} \\ p-d=\dfrac{1}{2a} \\ \hline 2d=\dfrac{-1-\Delta}{2a} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{d=\frac{-1-\Delta}{4a}}$$

Riassumendo: a partire dall'equazione canonica della parabola, $x=ay^2+by+c$ possiamo determinare le coordinate del fuoco e l'equazione della direttrice:

$$F\left(\frac{1-\Delta}{4a};-\frac{b}{2a}\right) \qquad\qquad d\colon x=-\frac{1+\Delta}{4a}$$

Possiamo determinare anche l'equazione dell'asse della parabola, passante per il fuoco e perpendicolare alla direttrice, che è anche asse di simmetria della parabola:

$$a\colon y=-\frac{b}{2a}$$

A questo punto, possiamo determinare le coordinate generiche del vertice, che è il punto in cui la parabola interseca il suo asse:

$$\begin{cases} y=-\dfrac{b}{2a} \\ x=ay^2+by+c \end{cases}$$

$$x=a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2+b\left(-\frac{b}{2a}\right)+c=a\cdot\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{2a}+c=\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{2a}+c=\frac{b^2-2b^2+4ac}{4a}=-\frac{b^2-4ac}{4a}=-\frac{\Delta}{4a}$$

Il vertice ha coordinate:

$$V\left(-\frac{\Delta}{4a};-\frac{b}{2a}\right)$$

CASI PARTICOLARI – studio dei coefficienti della parabola con asse parallelo all'asse y

$\boldsymbol{b = 0}$: L'equazione della parabola diventa $\boldsymbol{y = ax^2 + c}$

Vertice: $V\ (0; c)$

Asse della parabola: $x = 0$ (ovvero l'asse y)

Fuoco: $F\left(0; \frac{1+4ac}{4a}\right)$

Direttrice: $y = -\frac{1+4ac}{4a}$

$\boldsymbol{c = 0}$: L'equazione della parabola diventa $\boldsymbol{y = ax^2 + bx}$

Vertice: $V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2}{4a}\right)$

La parabola passa per l'origine degli assi cartesiani

$\boldsymbol{b = c = 0}$: L'equazione della parabola diventa $\boldsymbol{y = ax^2}$

Vertice: $V\ (0; 0) \equiv O$

Asse della parabola: $x = 0$ (ovvero l'asse y)

Fuoco: $F\left(0; \frac{1}{4a}\right)$

Direttrice: $y = -\frac{1}{4a}$

Il coefficiente a: $a > 0$ la parabola ha la concavità rivolta verso l'alto (ovvero il fuoco si trova "sopra" la direttrice)

$a < 0$ la parabola ha la concavità rivolta verso il basso (ovvero il fuoco si trova "sotto" la direttrice)

All'aumentare di a in valore assoluto, l'apertura della parabola diminuisce.