FUNZIONI – ALCUNE DEFINIZIONI[1]

Funzione o applicazione: Dati due insiemi A e B, che chiamiamo rispettivamente “insieme di partenza” e “insieme di arrivo”, si dice **funzione** o **applicazione** *f* di A in B una legge che associ a **ogni** elemento di A **uno e un solo** elemento di B.

L’insieme A viene detto **dominio** della funzione *f* e si indica con D_f.

Per ogni $a \in A$, l’elemento $b \in B$ che in *modo unico* gli viene associato mediante la *f* è denominato con $f(a)$ e viene detto **immagine** di *a* secondo *f*.
L’insieme $\{ f(a) \mid a \in A\}$ delle immagini degli elementi di A secondo *f* si chiama **codominio** di *f* o immagine di A in B e può essere indicato con uno dei seguenti simboli: $f[A]$ o C_f.

Funzione iniettiva: Si dice che *f*: A → B è **iniettiva** se a elementi diversi di A corrispondono elementi diversi di B.

$$a \in A, a' \in A \quad e \quad a \neq a' \quad \Rightarrow \quad f(a) \neq f(a')$$

Funzione suriettiva: Una funzione *f*: A → B è **suriettiva** quando **ogni** elemento di B è immagine di **almeno un** elemento di A, cioè *f*: [A] = B.

$$\forall\, b \in B \quad \exists\, a \in A \mid f(a) = b$$

Funzione biunivoche o biiettive: Una funzione *f*: A → B si dice **biunivoca** o **biiettiva** se è contemporaneamente iniettiva e suriettiva, cioè se **ogni** elemento di B è l’immagine di **uno e un solo** elemento di A.

Funzione crescente: La funzione *f* si dice **crescente** se per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in D_f$, con $x_1 < x_2$ si ha:

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Funzione decrescente: La funzione *f* si dice **decrescente** se per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in D_f$, con $x_1 < x_2$ si ha:

$$f(x_1) > f(x_2)$$

INTERVALLI – INTORNI – INSIEMI LIMITATI

Insieme limitato superiormente: Si dice che l’insieme E è **limitato superiormente** se esiste un numero M tale che per ogni *x* di E risulta $x \leq M$.
Il numero reale M si dice **maggiorante** di E.

Insieme limitato inferiormente: Si dice che l’insieme E è **limitato inferiormente** se esiste un numero *m* tale che per ogni *x* di E risulta $x \geq m$.
Il numero reale *m* si dice **minorante** di E.

Insieme limitato: Si dice che un insieme E è **limitato** se è limitato tanto inferiormente quanto superiormente.

Insieme illimitato: Si dice che un insieme E è **illimitato** se non è limitato.

Intervallo aperto: Si dice **intervallo aperto** di estremi *a* e *b* e si indica con $]a;b[$ l’insieme di tutti i numeri reali *x* tali che: $a < x < b$.

$$]a;b[= \{ x \mid x \in R;\, a < x < b \}$$

Analogamente: **intervallo chiuso** $$[a;b] = \{ x \mid x \in R;\, a \leq x \leq b \}$$

[1] L. Lamberti, L. Mereu, A. Nanni, *Matematica uno*, Etas Libri
L. Lamberti, L. Mereu, A. Nanni, *Matematica tre*, Etas Libri

Possiamo considerare anche gli intervalli aperti a sinistra e chiusi a destra:

$$]\, a; b\,] = \{ x \mid x \in R;\ a < x \le b \}$$

O gli intervalli aperti a destra e chiusi a sinistra:

$$[\, a; b\,[= \{ x \mid x \in R;\ a \le x < b \}$$

Gli insiemi indicati sono limitati. Tra gli intervalli illimitati:

$$]-\infty; a\,] = \{ x \mid x \in R;\ x \le a \} \qquad]-\infty; a\,[= \{ x \mid x \in R;\ x < a \}$$

$$[\, a; +\infty\,[= \{ x \mid x \in R;\ x \ge a \} \qquad]\, a; +\infty\,[= \{ x \mid x \in R;\ x > a \}$$

$$]-\infty; +\infty\,[= R$$

Intorno: Si dice **intorno di *x₀*** ogni intervallo aperto contenente $x_0 \in R$.

In simboli: $I_{x_0} =]\, x_0 - \delta'; x_0 + \delta''\,[$ con $\delta', \delta'' \in R_0^+$

Intorno destro: Dato $x_0 \in R$, si dice **intorno destro di x_0** l'intervallo: $I_{x_0}^+ = [\, x_0; x_0 + \delta\,[$ con $\delta \in R_0^+$

Intorno sinistro: Dato $x_0 \in R$, si dice **intorno sinistro di x_0** l'intervallo: $I_{x_0}^- =]\, x_0 - \delta; x_0\,]$ con $\delta \in R_0^+$

Estremo superiore: Si dice che il numero reale Λ è **estremo superiore** dell'insieme E se gode delle seguenti proprietà:

- non è superato da alcun elemento di E:

$$\forall x \in E \quad \Rightarrow \quad x \le \Lambda$$

- preso comunque un numero positivo ε, esiste almeno un elemento di E maggiore di $\Lambda - \varepsilon$:

$$\forall \varepsilon \in R_0^+ \quad \exists x \in E \mid x > \Lambda - \varepsilon$$

A seconda dei casi, Λ sarà *il più grande elemento di E* oppure *il più piccolo dei maggioranti*.

Teorema: L'estremo superiore di un insieme limitato superiormente è unico.

Se Λ appartiene all'insieme E si dice **massimo** dell'insieme, in quanto è il più grande tra gli elementi dell'insieme.

Estremo inferiore: Si dice che il numero reale λ è **estremo inferiore** dell'insieme E se gode delle seguenti proprietà:

- non supera alcun elemento di E:

$$\forall x \in E \quad \Rightarrow \quad x \ge \lambda$$

- preso comunque un numero positivo ε, esiste almeno un elemento di E minore di $\lambda + \varepsilon$:

$$\forall \varepsilon \in R_0^+ \quad \exists x \in E \mid x < \lambda + \varepsilon$$

A seconda dei casi, λ sarà *il più piccolo elemento di E* oppure *il più grande dei minoranti*.

Se λ appartiene all'insieme E si dice **minimo** dell'insieme, in quanto è il più piccolo tra gli elementi dell'insieme.

Se E è illimitato superiormente, si pone per convenzione: $\Lambda = +\infty$

Se E è illimitato inferiormente, si pone per convenzione: $\lambda = -\infty$

Funzione limitata: Una funzione si dice **limitata superiormente** se tale è il suo codominio, cioè se esiste un numero K tale che $f(x) \le K$ per ogni $x \in D_f$; si dice **limitata inferiormente** se tale è il suo codominio, cioè se esiste un numero H tale che $f(x) \ge H$ per ogni $x \in D_f$.

Una funzione si dice **limitata** se è limitata sia inferiormente sia superiormente.

Una funzione non limitata si dice **illimitata**.

Massimo: L'estremo superiore di una funzione è l'estremo superiore del codominio. Qualora il codominio abbia massimo, questo si dice **massimo della funzione**.

Minimo: L'estremo inferiore di una funzione è l'estremo inferiore del codominio. Qualora il codominio abbia minimo, questo si dice **minimo della funzione**.

Massimo locale: Si dice che $x_0 \in D_f$ è un punto di massimo locale o relativo per la funzione *f* se esiste un intorno I_{x_0} di x_0 tale che:
$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall\, x \in D_f \cap I_{x_0}$$

Minimo locale: Si dice che $x_0 \in D_f$ è un punto di minimo locale o relativo per la funzione *f* se esiste un intorno I_{x_0} di x_0 tale che:
$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall\, x \in D_f \cap I_{x_0}$$

Funzione pari: Una funzione *f* si dice **pari** se per ogni $x \in D_f$ risulta anche $-x \in D_f$ e si ha:
$$f(x) = f(-x)$$

Funzione dispari: Una funzione *f* si dice **dispari** se per ogni $x \in D_f$ risulta anche $-x \in D_f$ e si ha:
$$f(x) = -f(-x)$$

Funzione periodica: Una funzione *f* si dice **periodica** se esiste un numero T > 0 tale che, per ogni $x \in D_f$, si abbia:
$$x + T \in D_f \quad \text{e} \quad f(x+T) = f(x)$$

Il più piccolo dei numeri T per cui vale tale proprietà si dice **periodo** della funzione.